# REZONATORY MIKROFALOWE

Rezonator mikrofalowy jest to pewien obszar zamknięty. Przez obszar zamknięty rozumie się obszar przez brzegi którego nie ma przepływu energii, tzn. warunki brzegowe wymuszają w każdym punkcie brzegu znikanie składowej stycznej pola elektrycznego (ścianka elektryczna) lub pola magnetycznego (ścianka magnatyczna). Zakładamy, że ośrodek wypełniający badany obszar jest liniowy, izotropowy, jednorodny, stacjonarny oraz, że nie ma w nim źródeł pól (ładunków i prądów).

W obszarze tak określonym poszukujemy rozwiązania równań Maxwella w postaci rzeczywistej.

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \bullet \vec{B} = 0 \\ \nabla \bullet \vec{D} = 0 \end{cases}$$

Zakładamy, że pole elektryczne i magnetyczne można przedstawić w postaci iloczynu dwóch niezależnych funkcji czasu i przestrzeni:

$$\vec{E}(r,t) = e(r)U(t) \tag{1}$$

$$\vec{H}(r,t) = h(r)J(t) \tag{2}$$

z powyższego założenia wynikają następujące zależności:

$$\nabla \times \vec{E} = U\nabla \times e \tag{3}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = e\frac{\partial U}{\partial t} \tag{4}$$

podstawiając do dwóch pierwszych równań Maxwella zależności (1) i (2) i uwzględniając (3) i (4) otrzymujemy (5) i (6):

$$\begin{cases} U\nabla \times e = -\mu h \dfrac{dJ}{dt} & (5) \\ J\nabla \times h = (\sigma U + \varepsilon \dfrac{dU}{dt})e & (6) \end{cases}$$

Powyższe równania przekształcamy tak aby człony zależne od czasu znalazły się po jednej stronie, a człony zależne od przestrzeni po drugiej stronie:

$$\begin{cases} \dfrac{\nabla \times e}{h} = -\dfrac{\mu}{U}\dfrac{dJ}{dt} & (7) \\ \dfrac{\nabla \times h}{e} = \dfrac{1}{J}(\sigma U + \varepsilon \dfrac{dU}{dt}) & (8) \end{cases}$$

Ze względu na to, że lewe strony powyższych równań nie zależą od czasu, a prawe nie zależą od zmiennych przestrzenych i równości tych wyrażeń zadne z tych wyrażeń nie może zależeć ani od czasu ani od przestrzeni, czyli można je przyrównać do pewnych stałych $C_1$ i $C_2$.

$$\begin{cases} \dfrac{\nabla \times e}{h} = -\dfrac{\mu}{U}\dfrac{dJ}{dt} = C_1 & (9) \\ \dfrac{\nabla \times h}{e} = \dfrac{1}{J}(\sigma U + \varepsilon \dfrac{dU}{dt}) = C_2 & (10) \end{cases}$$

Wykorzystując zależności (9) i (10) można równania Maxwella przedstawić w postaci:

$$\begin{cases} \nabla \times e = C_1 h & (11) \\ \nabla \times h = C_2 e & (12) \end{cases}$$

Postępując podobnie jak przy wyprowadzaniu równania falowego oraz wykorzystując pozostałe równania Maxwella otrzymuje się:

$$\begin{cases} \nabla^2 e + C_1 C_2 e = 0 & (13) \\ \nabla^2 h + C_1 C_2 h = 0 & (14) \end{cases}$$

Równania (13) i (14) spełnione są dla określonych wartości stałych nazywanych wartościami własnymi tych równań.

Z powyższych równań, przy uwzględnieniu warunków brzegowych, można wyznaczyć rozkład pola w danym rezonatorze. Jednakże jest to zagadnienie bardzo trudne i rzadko stosowane w praktyce.
Większość praktycznie stosowanych rezonatorów może być traktowana jako zwarte na obu końcach odcinki prowadnic falowych (falowodów, linii TEM). W tym przypadku rozkłady pól są analogiczne z rozkładami fali stojącej w prowadnicy, z której wykonano rezonator.

W równaniach (7) i (8) prawe strony są zależne od czasu. Przekształcając równania (9) i (10) (tak aby uzyskać informację zależną od czasu) otrzymuje się:

$$\begin{cases} U = -\dfrac{\mu}{C_1}\dfrac{dJ}{dt} & (15) \\ J = \dfrac{1}{C_2}(\sigma U + \varepsilon\dfrac{dU}{dt}) & (16) \end{cases}$$

Różniczkujemy drugie równanie:

$$\begin{cases} U = -\dfrac{\mu}{C_1}\dfrac{dJ}{dt} \\ \dfrac{dJ}{dt} = \dfrac{1}{C_2}(\sigma\dfrac{dU}{dt} + \varepsilon\dfrac{d^2U}{dt^2}) \end{cases}$$

i podstawiamy do pierwszego.

$$\begin{cases} U = -\dfrac{\mu}{C_1}\dfrac{1}{C_2}(\sigma\dfrac{dU}{dt} + \varepsilon\dfrac{d^2U}{dt^2}) \\ \dfrac{dJ}{dt} = \dfrac{1}{C_2}(\sigma\dfrac{dU}{dt} + \varepsilon\dfrac{d^2U}{dt^2}) \end{cases}$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy równanie pierwsze w postaci:

$$\varepsilon\mu\frac{d^2U}{dt^2} + \sigma\mu\frac{dU}{dt} + C_1C_2U = 0 \qquad (17)$$

Postępując identycznie, tzn. różniczkując równanie (15) i podstawiając do (16) otrzymuje się:

$$\varepsilon\mu\frac{d^2J}{dt^2}+\sigma\mu\frac{dJ}{dt}+C_1C_2J=0 \tag{18}$$

Równania (17) i (18) są jednorodnymi, liniowymi równaniami różniczkowymi, których rozwiązania można przedstawić w postaci:

$$U=U_1\mathrm{e}^{s_1t}+U_2\mathrm{e}^{s_2t} \tag{19}$$

$$J=J_1\mathrm{e}^{s_1t}+J_2\mathrm{e}^{s_2t} \tag{20}$$

gdzie $U_1$, $U_2$, $J_1$ i $J_2$ są stałymi, których wartość określa się na podstawie warunków początkowych. Wartości $s_1$ i $s_2$ są rozwiązaniami równania charakterystycznego:

$$\varepsilon\mu s^2+\sigma\mu s+C_1C_2=0$$

Pierwiastki tego równania mają postać:

$$s_{1,2}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon}\mp\sqrt{\frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2}-\frac{C_1C_2}{\mu\varepsilon}}$$

Rozważmy szczególne przypadki ośrodków wypełniających rezonator:

**a) rezonator wypełniony bezstratnym dielektrykiem**

otrzymujemy wtedy poniższą zależność

$$s_{1,2}=\mp j\sqrt{\frac{C_1C_2}{\mu\varepsilon}}$$

Zakładając $U(0)=U_o,\ \frac{dU}{dt}=0 \quad \texttt{dla}\ t=0$ otrzymujemy zależność (19) w postaci:

$$U(t)=U_o\cos\left(\sqrt{\frac{C_1C_2}{\mu\varepsilon}}t\right)$$

Z powyższej zależności wynika, że jedyną dopuszczalną formą zależności pól od czasu dla tego przypadku jest funkcja typu sinusoidalnego. Drgania pól odbywają się z pulsacją określoną wzorem:

$$\omega_v = \sqrt{\frac{C_1 C_2}{\mu\varepsilon}}$$

i nazywaną pulsacją drgań własnych.

Pulsacja ta zależy od parametrów ośrodka oraz od stałych C (wartości własnych). Ponieważ wartości własne mogą przyjmować wiele ale tylko określonych wartości, tak więc pulsacja drgań własnych może być wiele. Każda z tych pulsacji jest związana z określonych rodzajem drgań w rezonatorze.

**b) rezonator wypełniony ośrodkiem o małych stratach, takich aby spełniony był poniższy warunek**

$$\frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2} < \omega^2{}_v$$

Postępując podobnie jak poprzednio otrzymujemy:

$$s_{1,2} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon} \pm j\sqrt{\omega_v^2 - \frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2}}$$

$$U(t) = U_o e^{-\frac{\sigma}{2\varepsilon}t} \cos\left(\sqrt{\omega_v^2 - \frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2}}t\right)$$

$$\omega_v' = \sqrt{\omega_v^2 - \frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2}}$$

Z powyższych zależności wynika, że amplituda pola elektrycznego maleje w funkcji czasu jak exp(-at) oraz że następuje zmiana pulsacji drgań własnych.

**c) rezonator wypełniony ośrodkiem o dużych stratach, takich że spełniony jest poniższy warunek**

$$\frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2} > \omega^2{}_v$$

wtedy

$$s_{1,2} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon} \mp \sqrt{\frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2} - \omega_v^2}$$

i są rzeczywiste, co powoduje, że pola nie ulegają oscylacjom, a są wykładniczo tłumione.

**d) rezonator wypełniony ośrodkiem o takich stratach, że spełniony jest poniższy warunek**

$$\frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2} = \omega^2{}_v$$

Jest to tzw. przypadek aperiodyczny krytyczny.

$$s_1 = s_2 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

$$U(t) = U_1 e^{-\frac{\sigma}{2\varepsilon}t} + U_2 t e^{-\frac{\sigma}{2\varepsilon}t}$$

W praktyce straty znane są tylko z pewną dokładnością, dlatego też nie uwzględnia się drugiego człony powyższego wzoru.

## PARAMETRY REZONATORÓW

- częstotliwość drgań własnych
  - częstotliwość rezonansowa
- dobroć
  - dobroć własna
  - dobroć obciążona

$$Q = 2\pi \frac{\overline{W}}{\overline{P}_q T}$$

gdzie: $\overline{W}$ - średnia energia magazynowana w rezonatorze, $\overline{P}_q$ - średnia moc strat w rezonatorze, T - okres drgań.

Zakładamy rezonator odizolowany i wypełniony małostratnym dielektrykiem. Wówczas dobroć można określić z poniższej zależności:

$$Q = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} = \frac{1}{tg\delta}$$

Dla przypadku aperiodycznego krytycznego dobroć wynosi 0.5
Dla Q>1/2 w rezonatorze występują oscylacje o pulsacji:

$$\omega_v^{'} = \sqrt{\omega_v^2 - \frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2}}$$

lub po uwzględnieniu Q:

$$\omega_v^{'} = \sqrt{\omega_v^2 - \frac{\sigma^2\omega_v^2}{4\varepsilon^2\omega_v^2}} = \omega_v\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2\omega_v^2}} = \omega_v\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

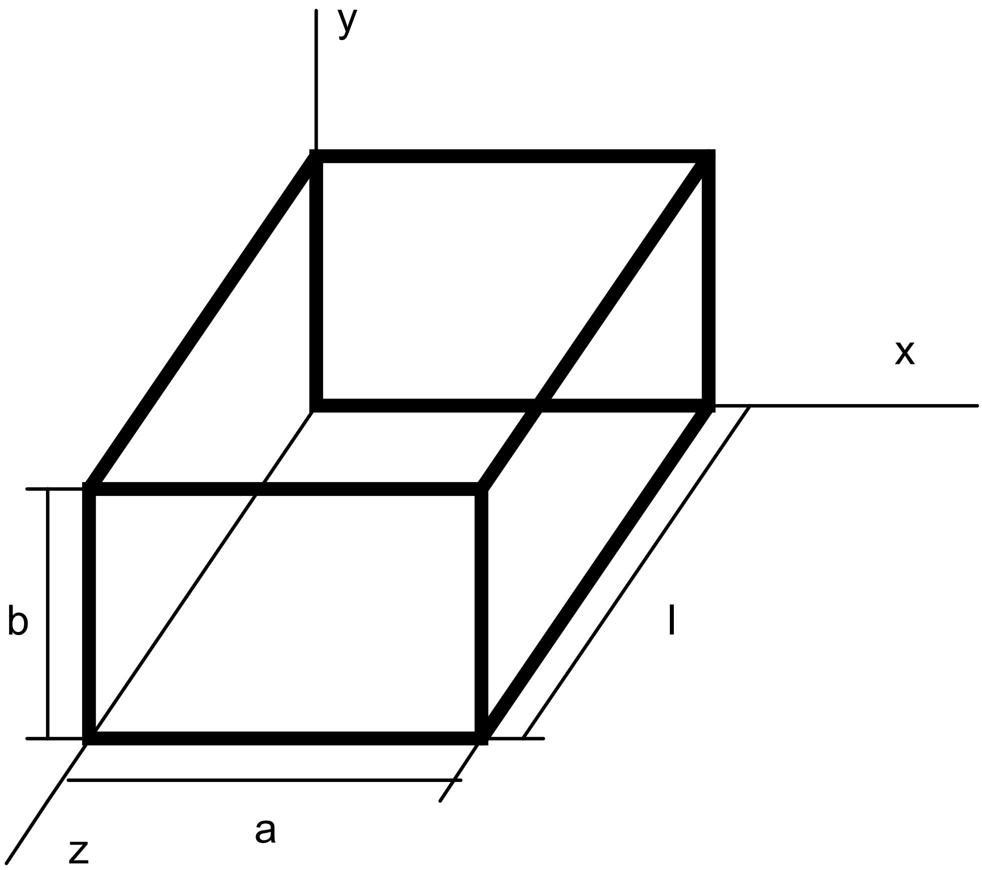
czyli ostatecznie:

$$\omega_v^{'} = \omega_v\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Dla dużej wartości Q, można przyjąć, że $\omega_v^{'} = \omega_v$
Oscylacje w takim rezonatorze będą zanikały wykładniczo ze współczynnikiem tłumienia d:

$$d = \frac{\omega_v^{'}}{2Q}$$

## Rezonator prostopadłościenny




$$\beta_z l = p\pi$$

gdzie: p - liczba naturalna

$$\beta_g^2 + \beta_z^2 = \beta^2$$

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_v}\right)^2$$

Z powyższego wzoru można wyznaczyć pulsację drgań własnych:

$$\omega_v = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}$$

Długość fali rezonansowej określa zależność:

$$\lambda_v = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}$$

**Rodzaje typu H**

$$H_z = H_{zm} \cos(\beta_x x) \cos(\beta_y y) \sin(\beta_z z)$$

$$H_x = \frac{H_{zm} \beta_x \beta_z}{\beta_g^2} \sin(\beta_x x) \cos(\beta_y y) \cos(\beta_z z)$$

$$H_y = -\frac{H_{zm} \beta_y \beta_z}{\beta_g^2} \cos(\beta_x x) \sin(\beta_y y) \cos(\beta_z z)$$

$$E_x = -\frac{j\omega\mu H_{zm} \beta_y}{\beta_g^2} \cos(\beta_x x) \sin(\beta_y y) \sin(\beta_z z)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu H_{zm} \beta_x}{\beta_g^2} \sin(\beta_x x) \cos(\beta_y y) \sin(\beta_z z)$$

gdzie: $\beta_x = \frac{m\pi}{a}$, $\beta_y = \frac{n\pi}{b}$, $\beta_z = \frac{p\pi}{l}$, $\beta_g = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}$

**Rodzaje typu E**

$$E_z = E_{zm} \sin(\beta_x x) \sin(\beta_y y) \cos(\beta_z z)$$

$$E_x = -\frac{E_{zm} \beta_x \beta_z}{\beta_g^2} \cos(\beta_x x) \sin(\beta_y y) \sin(\beta_z z)$$

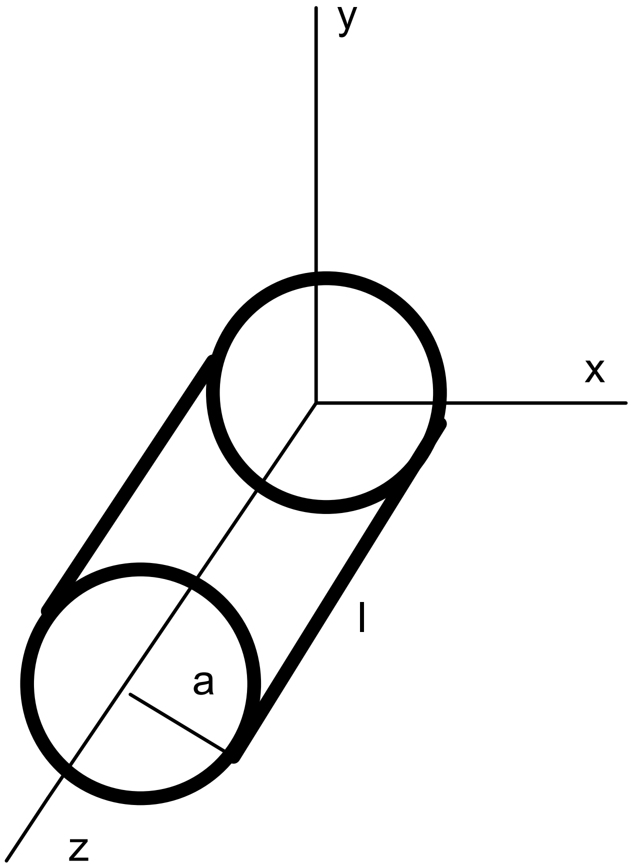
$$E_y = -\frac{E_{zm} \beta_y \beta_z}{\beta_g^2} \sin(\beta_x x) \cos(\beta_y y) \sin(\beta_z z)$$

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon E_{zm} \beta_y}{\beta_g^2} \sin(\beta_x x) \cos(\beta_y y) \cos(\beta_z z)$$

$$H_y = -\frac{j\omega\varepsilon E_{zm} \beta_x}{\beta_g^2} \cos(\beta_x x) \sin(\beta_y y) \cos(\beta_z z)$$

Rodzajem podstawowym jest rodzaj $H_{101}$

## Rezonator cylindryczny




$$\beta_g^2 + \beta_z^2 = \beta^2$$

$$\beta_g = \frac{\chi'_{mn}}{a}$$

$$\omega_v = \frac{\sqrt{\left(\frac{\chi'_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Rodzajem podstawowym jest rodzaj $H_{111}$ lub rodzaj $E_{010}$