5. MODULACJE

5.1. Wstęp

Modulacja polega na odzwierciedleniu przebiegu sygnału oryginalnego przez zmianę jednego z parametrów fali nośnej. Przyczyny stosowania modulacji:

1. **Umożliwienie wydajnego wypromieniowania sygnału do ośrodka rozchodzenia się fal.**
2. **Zmniejszenie względnej szerokości pasma.**

Względną szerokość pasma możemy wyrazić wzorem:

$$\frac{\Delta f}{f_{śr}} = 2\frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \tag{5.1}$$

gdzie: - $\Delta f = f_2 - f_1$ **- bezwzględna szerokość pasma,**

$f_{śr} = (f_2 + f_1)/2$ **– częstotliwość środkowa.**

3. **Uodpornienie sygnału na wpływ szumów i zakłóceń.**
4. **Umożliwienie wielokrotnego wykorzystania kanału częstotliwościowego.**
5. **Umożliwienie filtracji częstotliwościowej.**

Wyróżniamy następujące systemy modulacji:

- **wąskopasmowe,**
- **szerokopasmowe.**

Z modulacją wąskopasmową mamy do czynienia w przypadku, gdy szerokość widma sygnału zmodulowanego jest równa lub niewiele większa od szerokości widma sygnału oryginalnego.

Z modulacją szerokopasmową mamy do czynienia w przypadku, gdy szerokość widma sygnału zmodulowanego jest wielokrotnie większa od szerokości widma sygnału oryginalnego.

5.2. Modulacja amplitudy

Falę sinusoidalną możemy zapisać w postaci:

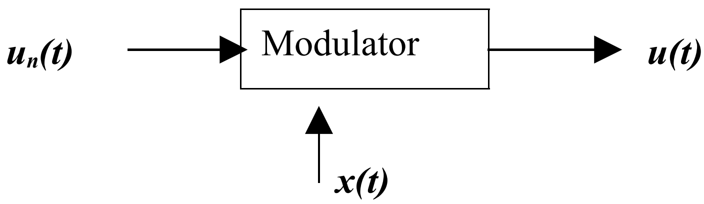
$$u(t) = A\cos(\Omega t + \Phi) \qquad \textbf{(5.2)}$$

gdzie: A – amplituda fali nośnej,

Ω - pulsacja (2π F),

Φ - faza.

Proces modulacji jest realizowany w urządzeniu zwanym modulatorem. Na rys. 5.1 przedstawiono schemat blokowy procesu modulacji.



Rys. 5.1. Schemat blokowy procesu modulacji

$u_n(t)$ – fala nośna,

$x(t)$ – sygnał modulujący,

$u(t)$ **–** fala zmodulowana.

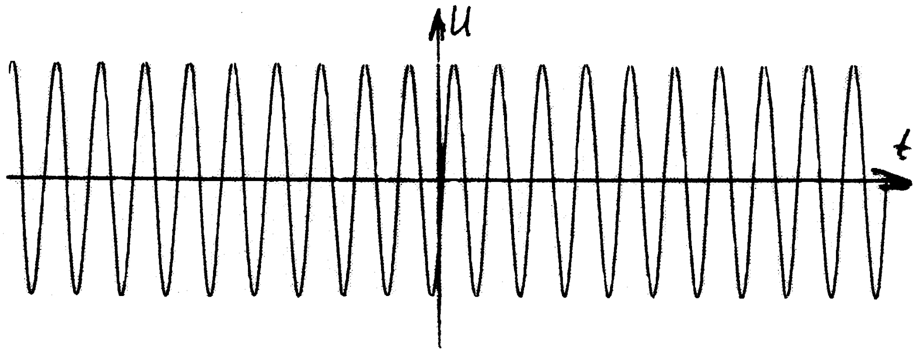
W procesie modulacji amplitudy przebieg sygnału oryginalnego odzwierciedla przebieg amplitudy fali nośnej sygnału modulowanego. Falę nośną sinusoidalną możemy opisać następującym wzorem:

$$u_n(t) = A_o \cos(\Omega_o t + \Phi_o) \qquad \textbf{(5.3)}$$

Falę nośną sinusoidalną możemy również opisać wzorem Eulera:

$$u(t) = \frac{1}{2} A_O [e^{j(\Omega_0 t + \Phi_0)} + e^{-j(\Omega_0 t + \Phi_0)}] \qquad \textbf{(5.4)}$$

Przebieg czasowy fali nośnej przedstawiono na rys. 5.2.



Rys. 5.2. Przebieg czasowy sinusoidalnej fali nośnej

Zmodulowaną falę nośną opisuje się wzorem:

$$u(t) = A(t) \cos(\Omega_o t + \Phi_o) \qquad (5.5)$$

Dla liniowej modulacji amplitudy, amplituda chwilowa wyraża się wzorem:

$$A(t) = A_o [1 + k\, x(t)] \qquad (5.6)$$

gdzie: *k* - stała

Przyjmując sygnał modulujący sinusoidalny o postaci:

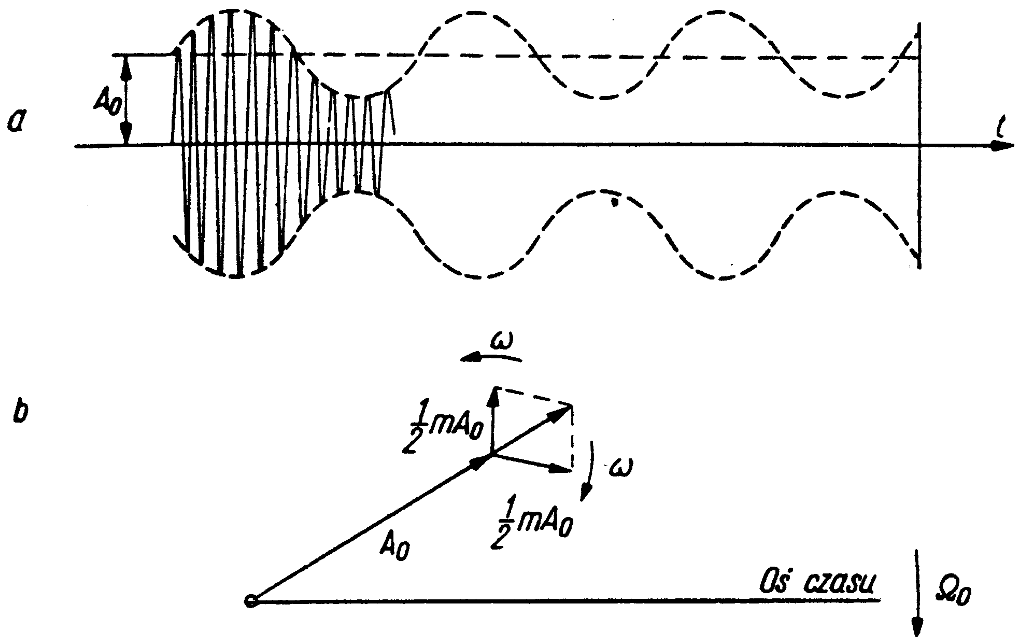
$$x(t) = U_m \cos(\omega t + \Psi_o) \qquad (5.7)$$

którego częstotliwość ω jest mniejsza od częstotliwości Ω_o,
otrzymujemy przebieg zmodulowany:

$$u(t) = A(t)[1 + m \cos(\omega t + \Psi_o] \cos(\Omega_o t + \Phi_o) \qquad (5.8)$$

gdzie: $m = k\ U_m$ - współczynnik głębokości modulacji

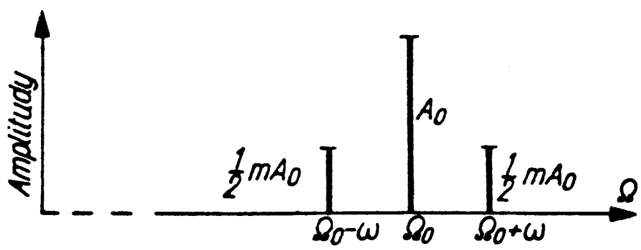
Na rys.5.3a przedstawiono przebieg czasowy zmodulowanej fali nośnej natomiast na rys.5.3b układ fazorów.



Rys. 5.3. Fala zmodulowana w amplitudzie

a) przebieg czasowy fali nośnej,

b) układ fazorów fali zmodulowanej.



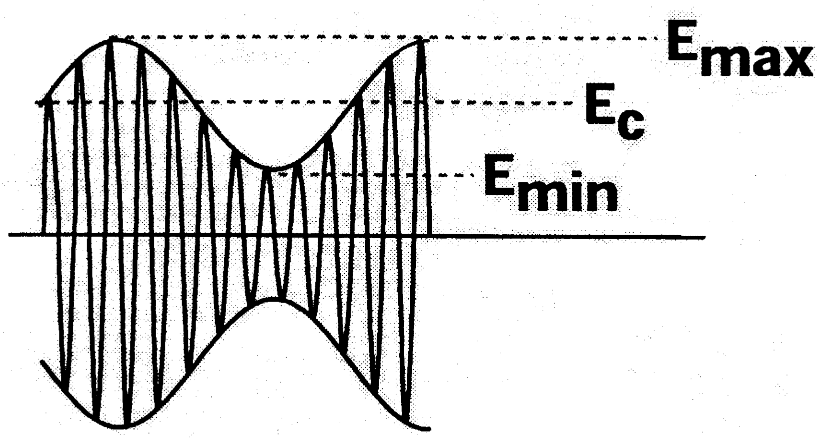
Rys.5.4. Widmo amplitudowe fali AM przy modulacji sygnałem sinusoidalnym

Wartość współczynnika modulacji *m* można wyznaczyć ze wzoru

$$m = \frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max} + E_{min}} \tag{5.9}$$

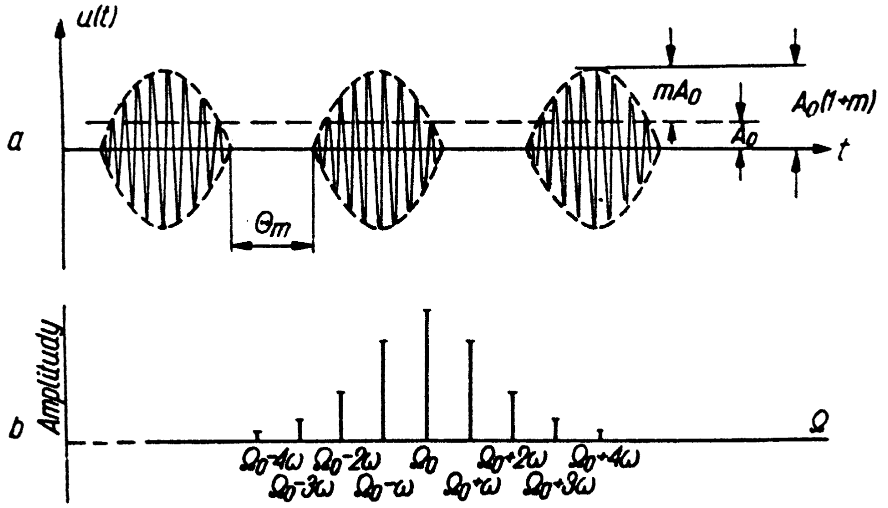
gdzie: E_{max} – maksymalna wartość amplitudy napięcia sygnału zmodulowanego,

E_{min} – minimalna wartość amplitudy napięcia sygnału zmodulowanego.



Rys.5.5. Fala zmodulowana w amplitudzie

Jeśli m>1 oraz charakterystyka modulatora amplitudy jest nieliniowa to sygnał zmodulowany przyjmuje kształt przedstawiony na rys. 5.6.



Rys. 5.6. Fala zmodulowana w amplitudzie dla m>1

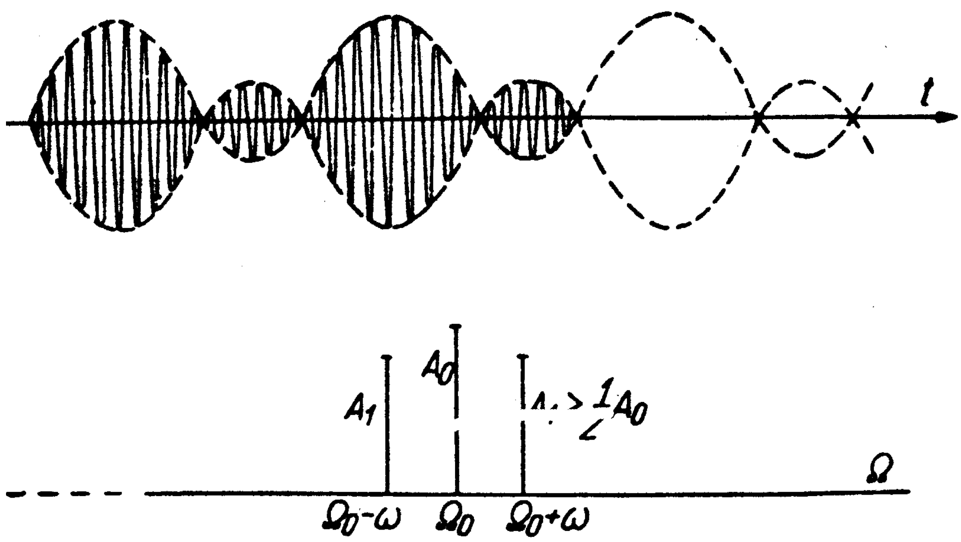
a) przebieg czasowy,

b) widmo.

Sygnał z modulowany w amplitudzie dla m>1 i poddany filtracji za pomocą filtru pasmowego.

a)

b)



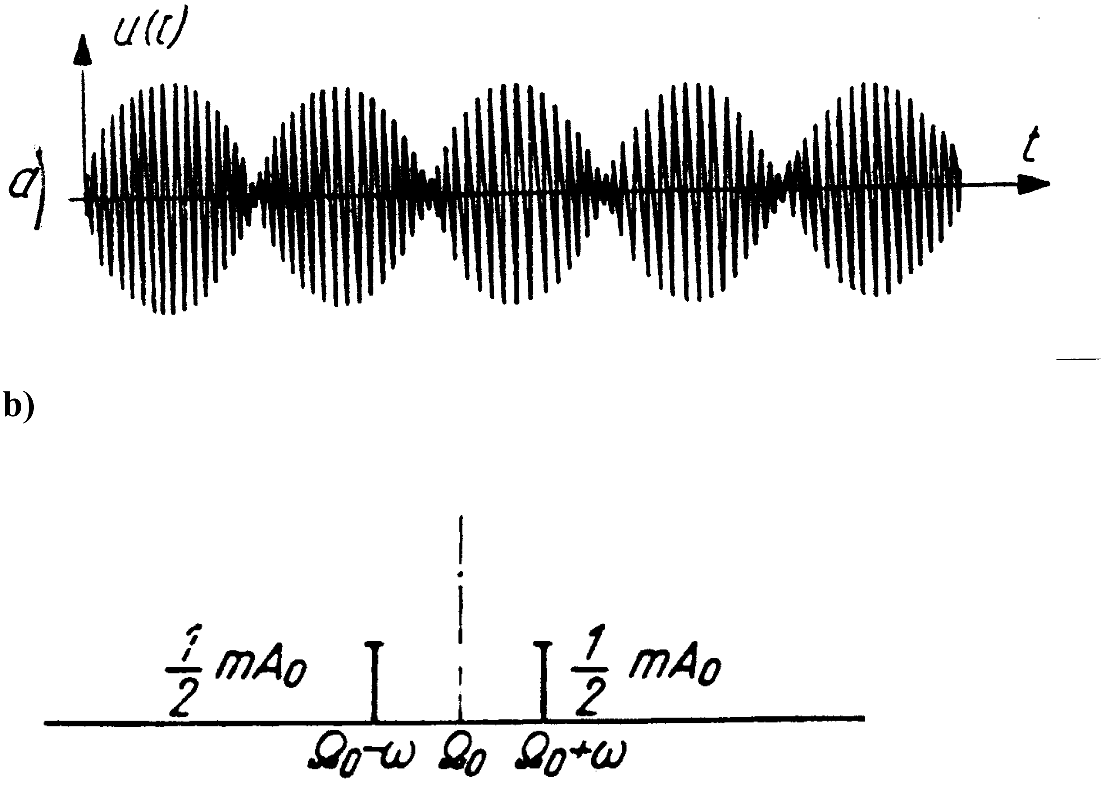
Rys. 5.7. Fala zmodulowana w amplitudzie dla m>1 i poddana filtracji

a) przebieg czasowy,

b) widmo.

Modulacja dwuwstęgowa bez fali nośnej

Przebieg czasowy sygnału zmodulowanego w amplitudzie, bez fali nośnej, (DB –S.C.) przedstawiono na rys. 5.8.



Rys. 5.8. Sygnał AM z modulacją dwuwstęgową bez fali nośnej

a) przebieg czasowy,

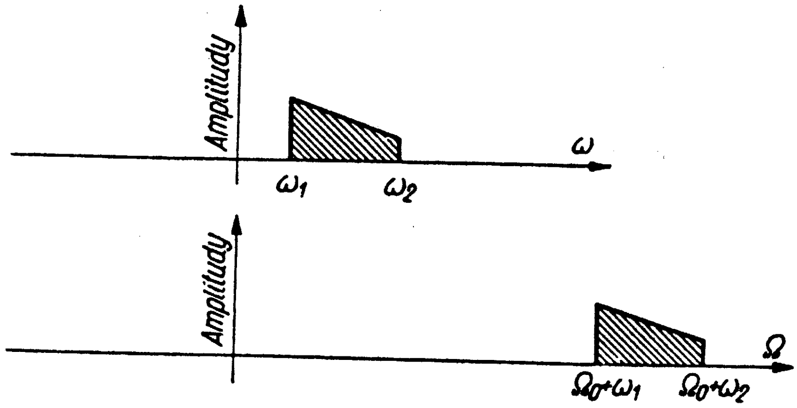
b) widmo.

Modulacja jednowstęgowa

Szerokość widma sygnału zmodulowanego jednowstęgowo jest najmniejsza spośród widm jakich systemów modulacji. Dalsze zawężanie widma jest możliwe tylko przez odpowiednie kodowanie sygnału modulującego i zmodulowanego.

a)

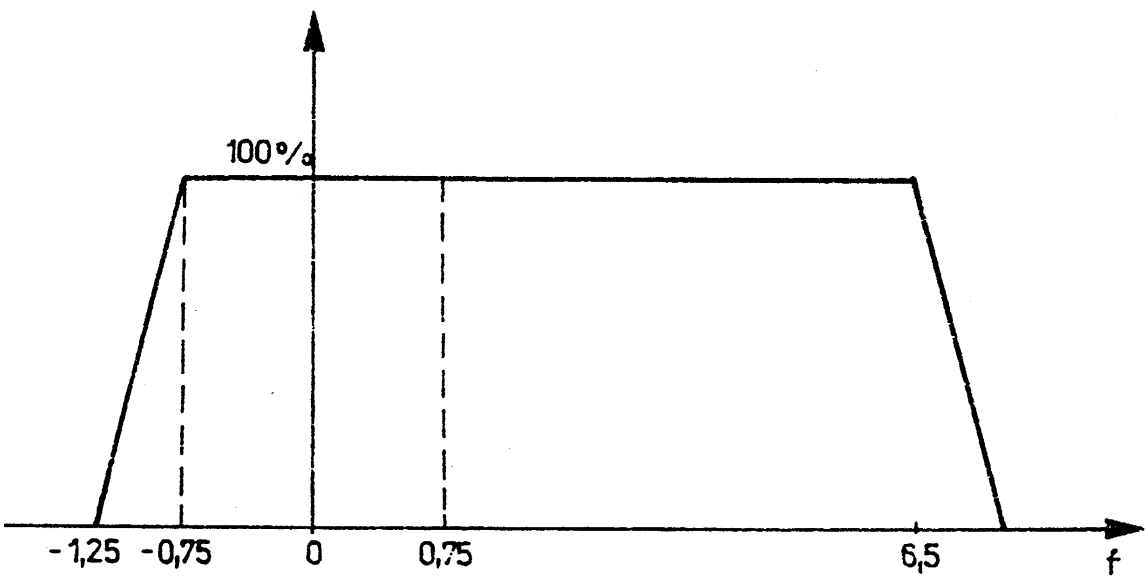
b)



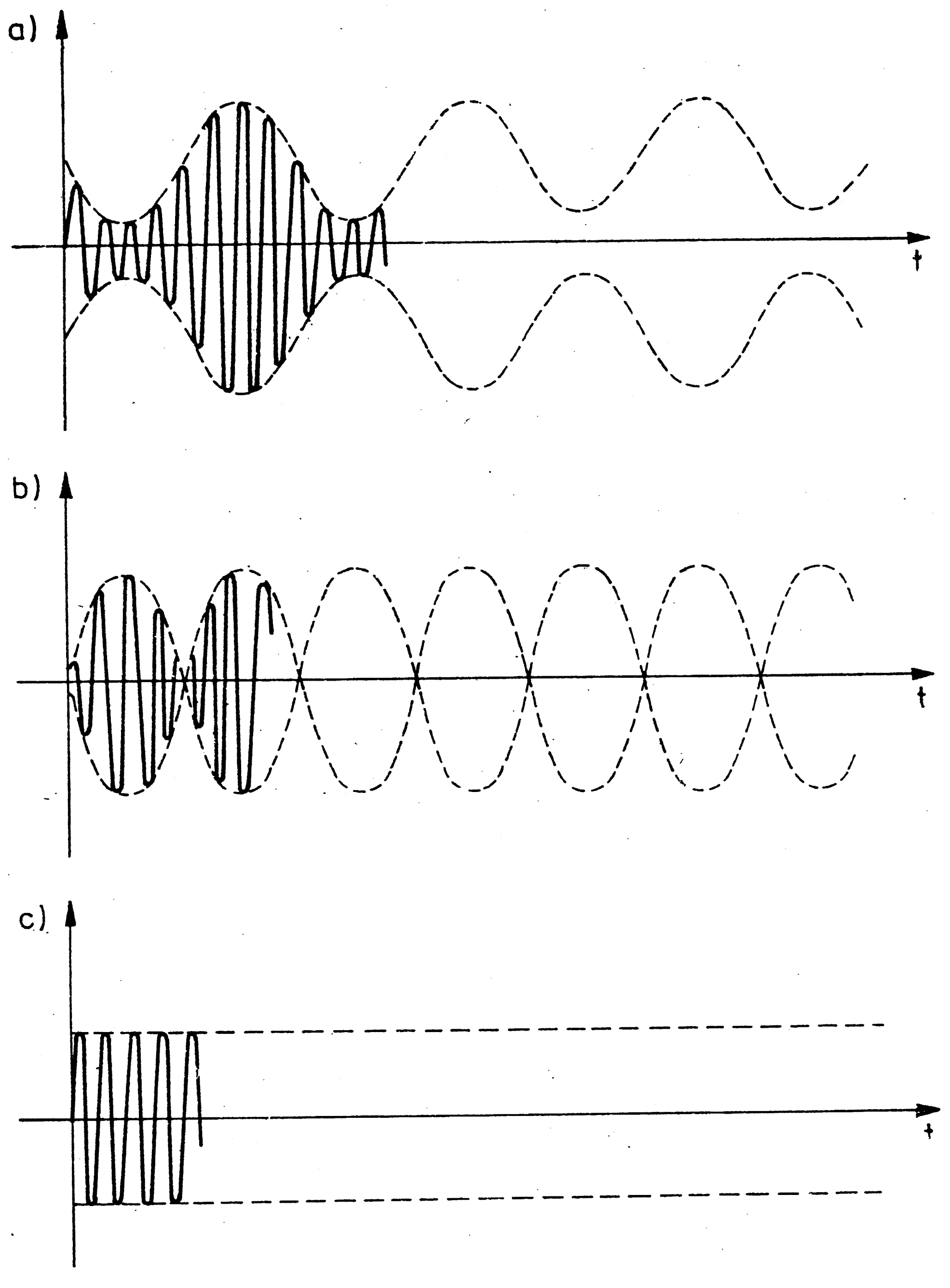
Rys. 5.9. Widmo sygnału

a) modulującego,

b) zmodulowanego jednowstęgowo.



Rys. 5.10. Charakterystyka amplitudowa sygnału AM telewizji



Rys. 5.11. Przebiegi czasowe z modulacją amplitudy

a) dwuwstęgowa z falą nośną,

b) dwuwstęgowa z falą nośną,

c) jednowstęgowa.

5.3. Modulacja kąta

Modulacja kątowa polega na zmienianiu przez przebieg modulujący kąta Φ fali nośnej wyrażonej wzorem:

$$u(t) = A_o \cos(\Phi_o) \qquad \textbf{(5.10)}$$

W zależności od sposobu uzależniania kąta Φ od przebiegu modulującego można uzyskać różne rodzaje modulacji;
między innymi modulację częstotliwości (FM)
i modulację fazy (PM).

Modulacja częstotliwości.

Przy liniowej modulacji FM częstotliwość chwilowa zmienia się według wzoru

$$F(t) = F_o + k\, x(t) \qquad \textbf{(5.11)}$$

gdzie: ***x(t)*** **– przebieg modulujący,**
k **– stała.**

Dewiacją częstotliwości nazywamy wartość bezwzględną maksymalnego odchylenia częstotliwości chwilowej od jej wartości średniej i w przypadku modulacji liniowej określana jest wzorem

$$\Delta F = k\, |x(t)|_{max} \qquad \textbf{(5.12)}$$

$$\Phi(t) = \int_O^t 2\pi F(t)\, dt = \Omega_0 t + 2\pi k \int_O^t x(t)\, dt + \Phi_0 \qquad \textbf{(5.13)}$$

Jeżeli częstotliwość chwilowa wyraża się wzorem (5.11) to faza chwilowa jest równa:

Napięcie fali zmodulowanej wyraża się wzorem:

Jeżeli przebieg modulujący *x(t)* jest przebiegiem sinusoidalnym tzn.:

$$x(t) = U_m \cos(\omega t + \Psi_o) \qquad (5.14)$$

$$u(t) = A_0 \cos\Phi(t) = A_0 \cos[\Omega_0 t + 2\pi k \int_O^t x(t)dt + \Phi_0] \qquad (5.15)$$

to częstotliwość chwilowa wyraża się wzorem:

$$F(t) = F_o + \Delta F \cos(\omega t + \Psi_o) \qquad (5.16)$$

Przebieg fali zmodulowanej opisany jest wzorem:

$$u(t) = A_0 \cos[\Omega_0 t + \frac{\Delta\Omega}{\omega}\sin(\omega t + \Psi_0) + \Phi_0] \qquad (5.17)$$

gdzie: $\Delta\Omega = 2\pi\Delta F$

$\omega = 2\pi f$

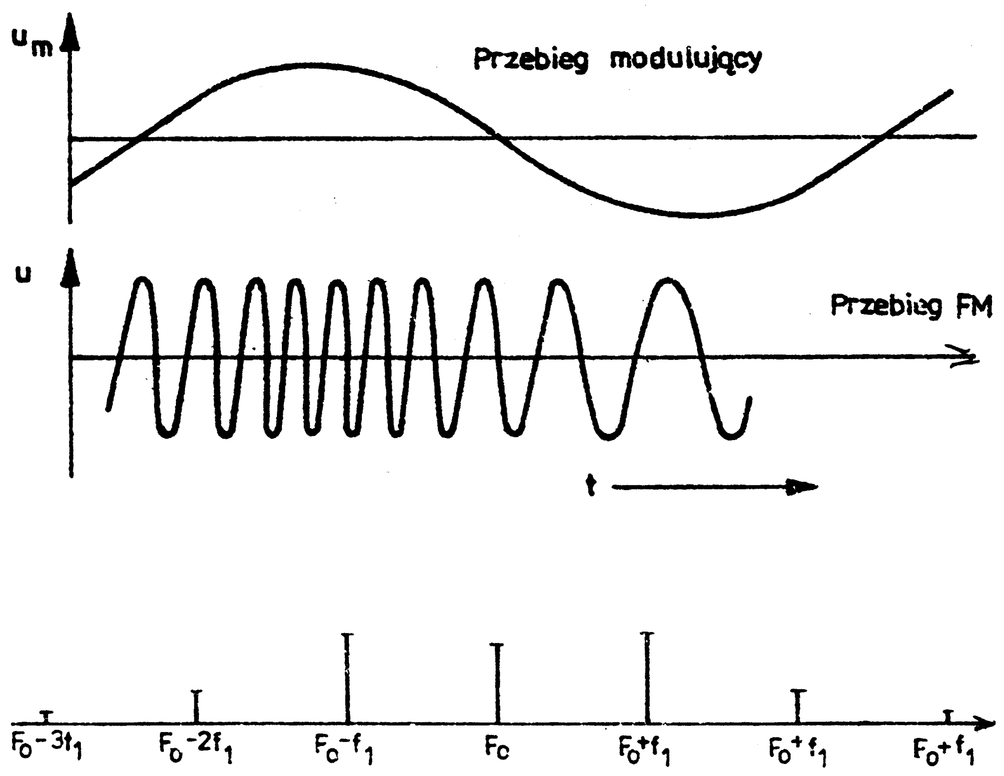
Wielkość

$$\beta = \frac{\Delta\Omega}{\omega} = \frac{\Delta F}{f} \qquad (5.18)$$

nazywa się indeksem modulacji.

a)

b)



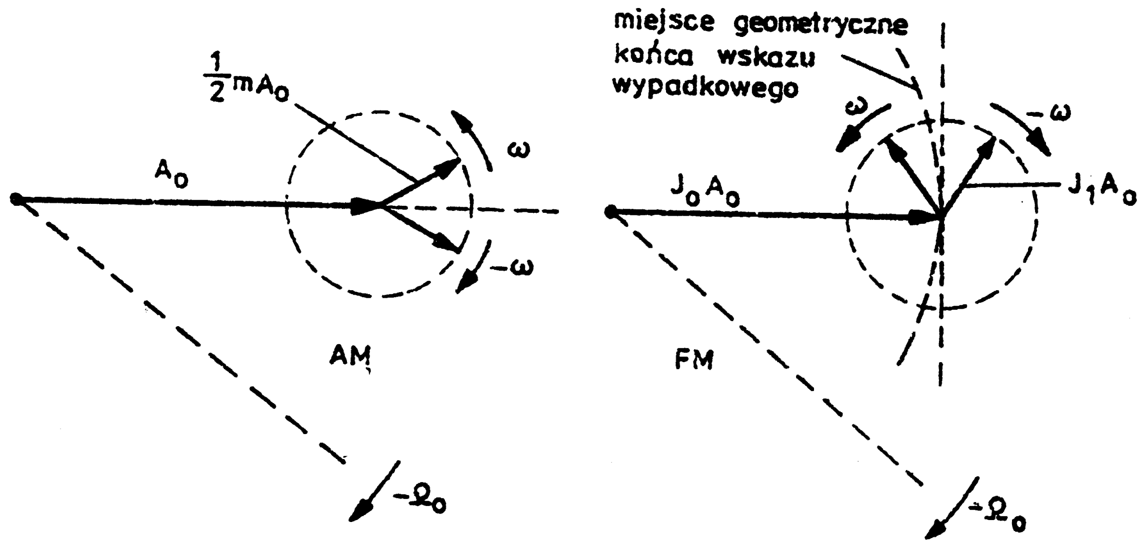
c)

Rys. 5.12. Sygnał z modulacją FM

a) sygnał modulujący,

b) sygnał zmodulowany,

c) widmo sygnału zmodulowanego.



Rys. 5.13.Wykres wskazów

a) przy modulacji AM,

b) przy modulacji FM.

Modulacja fazy

Przy liniowej modulacji PM fazy, faza chwilowa zmienia się według wzoru

$$\Phi(t) = \Omega_o\, t + k\, x(t) \qquad (3.10)$$

W przypadku modulacji liniowej dewiację fazy (maksymalną zmianę fazy) możemy określić wzorem:

$$\Delta\, \Phi = k\, /x(t)/_{max} \qquad (3.11)$$

Napięcie fali zmodulowanej wyraża się wzorem:

$$u(t) = A_o \cos[\Omega_o\, t + k\, x(t)] \qquad (3.12)$$

Jeśli sygnał modulujący jest sinusoidalny

$$x(t) = U_m \cos(\omega\, t + \Psi_o) \qquad (3.13)$$

to fazę chwilową można opisać wzorem:

$$\Phi(t) = \Omega_o\, t + \Delta\, \Phi\ \cos(\omega\, t + \Psi_o) \qquad (3.14)$$

gdzie: $\Delta\, \Phi$ **-** $k\, U_m$ **– dewiacja fazy**

natomiast falę zmodulowaną można opisać wzorem:

$$u(t) = A_o \cos[\Omega_o t + \Delta \Phi \cos(\omega t + \Psi_o) + \Phi_o] \qquad (3.15)$$

Indeks modulacji

$$\beta = \Delta \Phi \qquad (3.16)$$

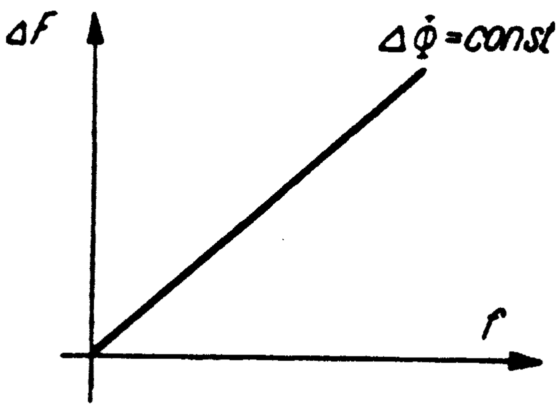
Z porównania wzorów (3.9) i (3.16) widzimy fale FM i PM są identyczne, jeśli ich indeksy modulacji mają jednakową wartość, czyli

$$\Delta \Phi = \frac{\Delta F}{f} \qquad (3.17)$$

oraz jeśli przy PM przebieg modulujący będzie miał postać:

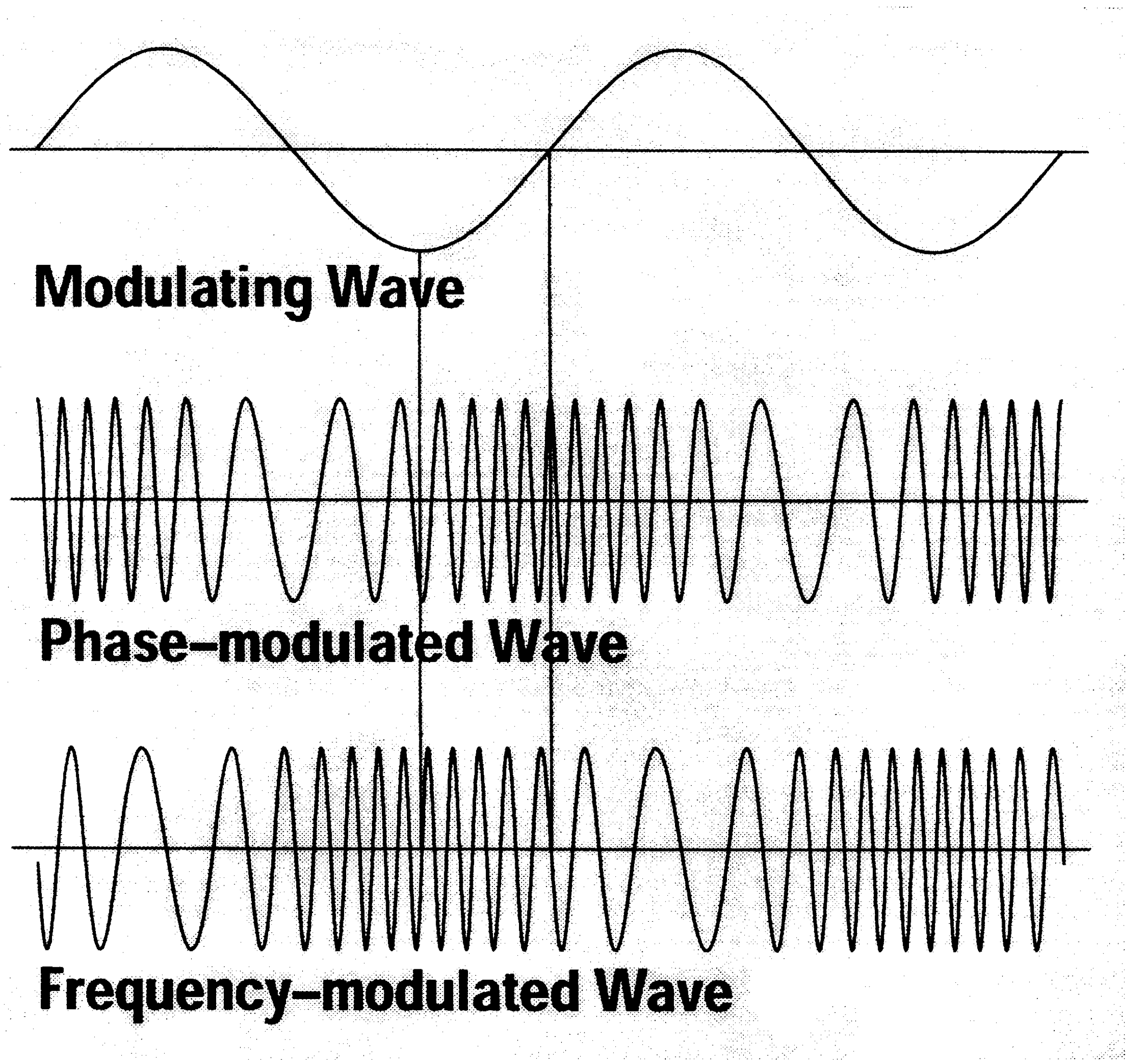
$$x(t) = U_m \cos(\omega t + \Psi_o - 90^0) = U_m \sin(\omega t + \Psi_o) \qquad (3.18)$$

Jeśli w modulatorze utrzymujemy stałą wartość *Δ Φ* to ze zmianą częstotliwości sygnału modulującego zmienia się dewiacja częstotliwości.



Rys. 5.14. Zależność dewiacji częstotliwości *F* od częstotliwości modulującej przy stałej wartości dewiacji fazy

Widmo modulacji FM i PM



Rys. 5.15. Porównanie przebiegów czasowych FM i PM

Widmo fal FM i PM wyznaczymy, przedstawiając wzory (3.8) i (3.15) w postaci zespolonej

$$u(t) = \mathrm{Re}\{ A_O e^{j(\Omega_0 t + \Phi_0)} e^{j\beta(\omega t + \Psi_0)} \} \qquad \textbf{(3.19)}$$

Z teorii funkcji Bessela wiadomo, że

$$e^{j\beta(\omega\ t+\Psi_0)} = \sum_{n=-}^{n=+} J_n(\beta)\ e^{jn(\omega\ t+\Psi_0)} \qquad \textbf{(3.20)}$$

gdzie: $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ **a** J_0 , J_1 , J_2 , ... **są funkcjami Bessela pierwszego**

$$u(t) = \mathrm{Re}\left\{ A_0\, e^{j\Omega_0 t} \sum_{n=-}^{n=+} J_n(\beta)\ e^{jn(\omega\ t+\Psi_0)} \right\} \qquad \textbf{(3.21)}$$

rodzaju, rzędu 0, 1, 2,....*n* argumentu β.

Pasmo częstotliwości zajmowane przez sygnał FM i PM można obliczyć ze wzoru Carsona:

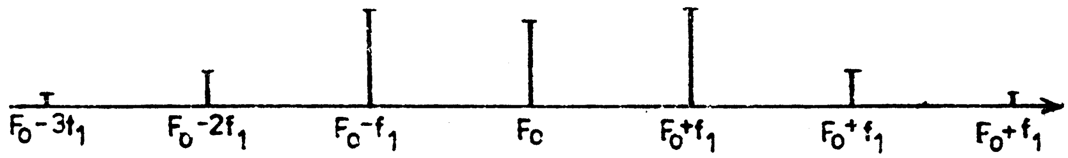
$$\mathbf{2\,\Delta F_w = 2\,(\Delta F + f) = 2\,f(1 + \beta)} \qquad \textbf{(3.22)}$$

gdzie: ΔF **– dewiacja częstotliwości,**

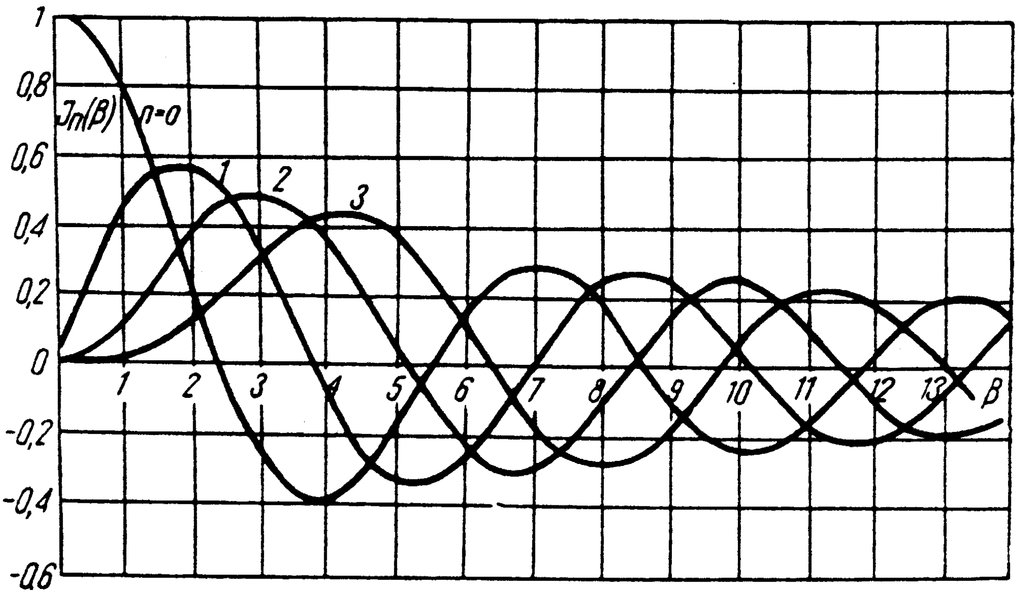
f **– częstotliwość modulująca,**

β - indeks modulacji.

Szerokopasmowa modulacja FM (β > 1)

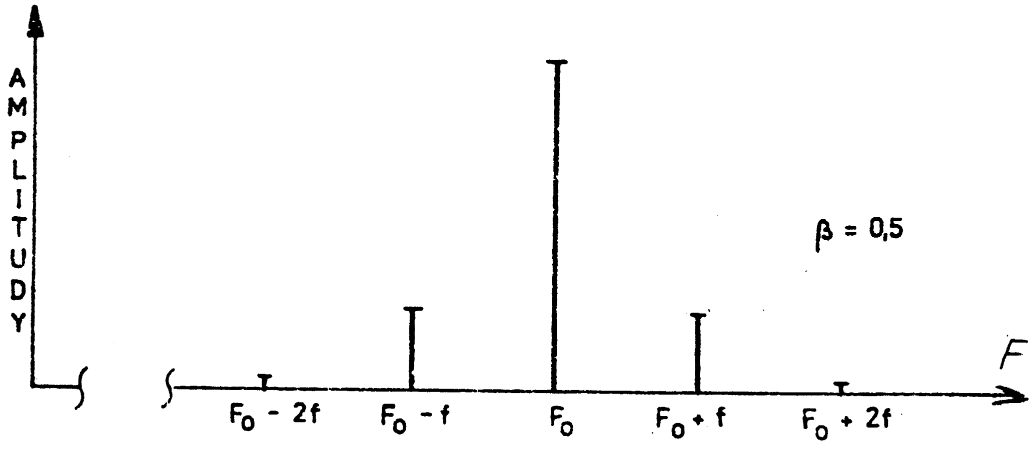


Rys. 5.16. Widmo sygnału z modulacją FM

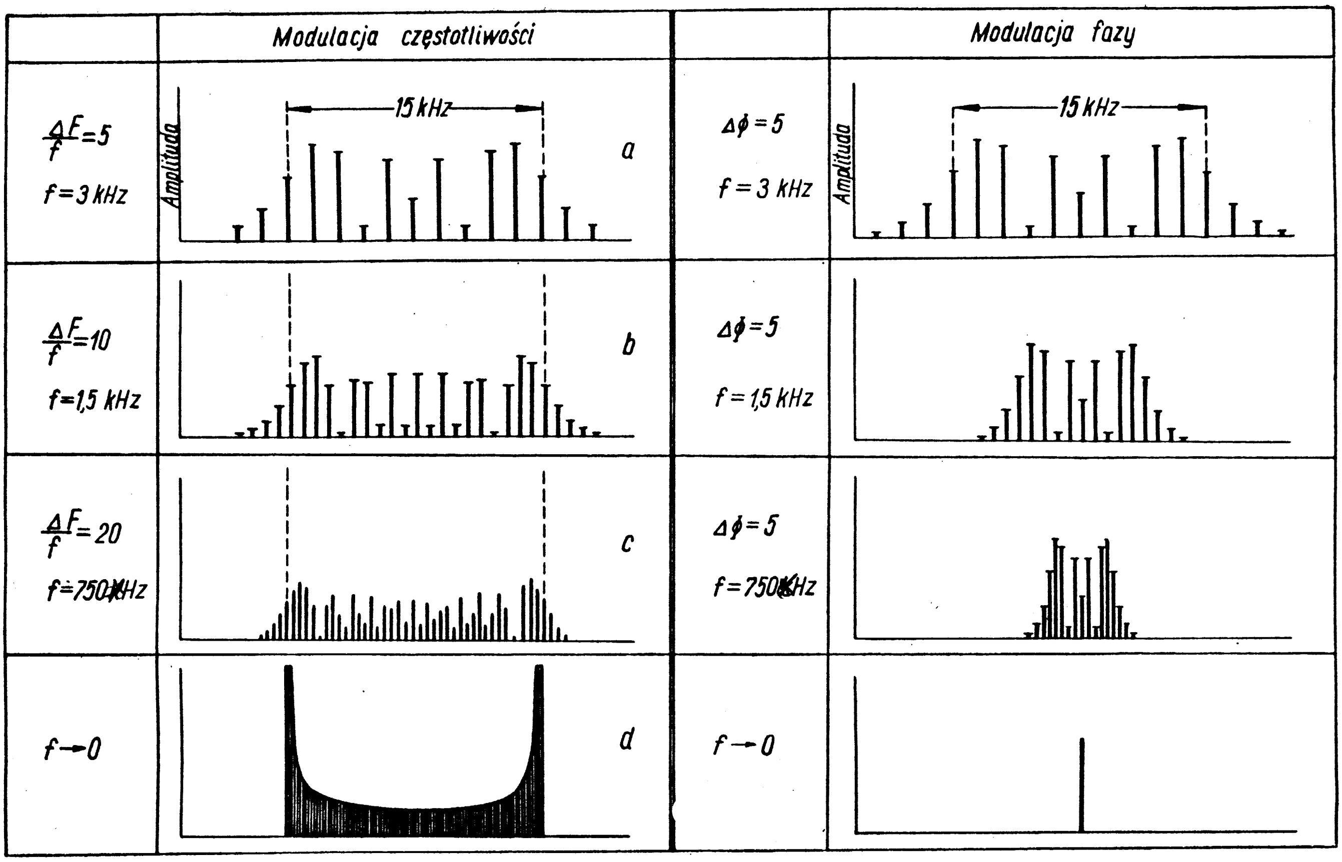


Rys. 5.17. Wykres funkcji Bessela $J_n(\beta)$

Wąskopasmowa modulacja FM (β≤ 1)



Rys. 5.18. Widmo wąskopasmowej modulacji FM



Rys.5.19. Porównanie widm modulacji FM i PM