MODELOWANIE OBRAZÓW METODAMI ANALIZY FUNKCJONALNEJ (WIELU SKAL)

Materiały KWOD, A.Przelaskowski

- Analiza funkcjonalna i harmoniczna
- Falki
- Dekompozycja falkowa
- Falki 2W

Podsumowanie

- Wprowadzenie: technika, rys historyczny
- Cyfrowa radiologia, doskonalenie technik obrazowania, integracja środowiska wspomagania
- Ograniczenia diagnostyki obrazowej – poziom i przyczyny błędów
- Przegląd metod przetwarzania i analizy obrazów
- Koncepcja CAD vs ACD – podstawowe idee wspomagania
- Rozumienie i interpretacja obrazów
- Przykłady CAD (rak płuc, rak sutka)
- Problem indeksowania (CAD-CBIR)
- Modele obrazów
- Funkcjonalna analiza obrazów

Analiza funkcjonalna

- Cechy obrazów: skalowalność w ‘rosnącej dziedzinie’, co prowadzi do koncepcji uciąglenia sygnałów
- Funkcja opisem informacji: dobieramy funkcje przybliżające z sieci aproksymacji danego rozwiązania (możliwie małolicznej względem błędu aproksymacji)
- Teoria: analiza funkcjonalna (harmoniczna) i teoria aproksymacji
- Praktyka: hierarchiczne bazy wielu skal opisujące zarazem właściwości lokalne i globalne, przestrzenne i częstotliwościowe obrazów

Interpolacja oraz aproksymacja ‘istoty’ sygnału

- Sygnały o skończonej energii

ciągły $\longrightarrow$ $s(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}), \text{ czyli } \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt < +\infty$

dyskretny $\longrightarrow$ $s \in \mathbf{l}^2(\mathbf{Z}), \text{ czyli } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s_n|^2 < +\infty$

Analiza funkcjonalna

Interpolacja sygnału za pomocą bazy funkcji ϕ

$$s(t) = \sum_n a_n \phi(t-n), \text{ gdzie } a_n = \langle s, \phi_n \rangle = \int s(t)\phi_n(t); \quad \phi_n(t) = \phi(t-n)$$

Aproksymacja ‘istoty’ sygnału

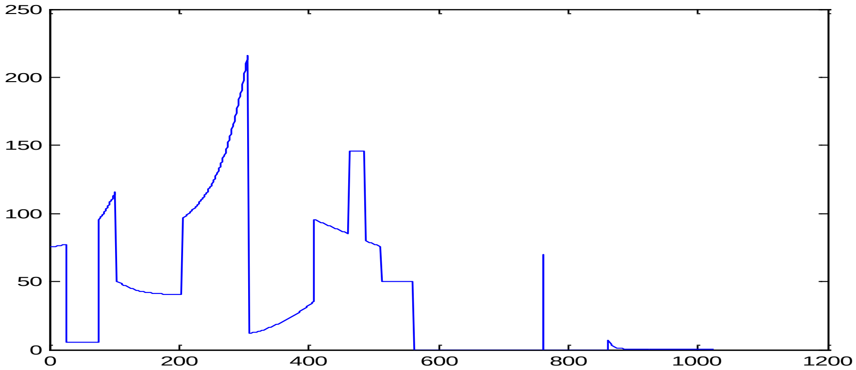
$$s = \sum_{n=1}^{M} a_n \phi_n \qquad\qquad s = \sum_{n \in A_M} a_n \phi_n$$

liniowa

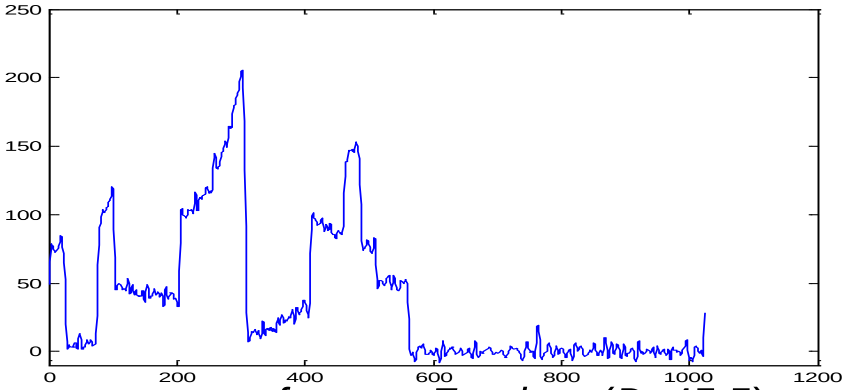
nieliniowa *(A_M jest zbiorem M największych współczynników)*

Efektywne modele aproksymacji nieliniowej

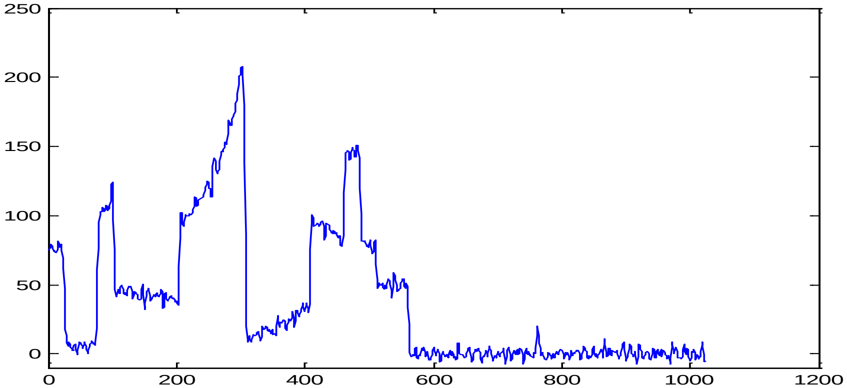
Model z 15 % współczynników uporządkowanych nierosnąco



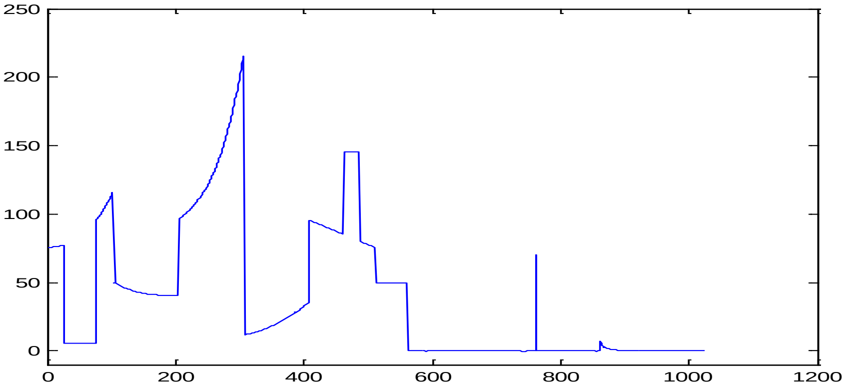
sygnał oryginalny



transformaty Fouriera (*D*=45,5)



transformaty DCT (*D*=37,4)



transformaty falkowej (*D*=0,008)

Potęga Fouriera

Jean-Baptiste-Joseph Fourier
(1768-1830)

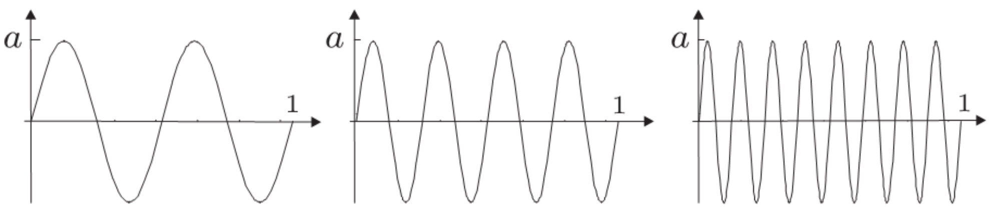
- Częstotliwościowa analiza sygnałów
- Dla każdej funkcji $f(x)$ okresowej (2π) mamy szereg:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$



$Sin\,4\pi t$ $Sin\,8\pi t$ $Sin\,16\pi t$

- Zespolone szeregi Fouriera

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_k x}, a_k \in \mathrm{R}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Transformacja Fouriera (analiza i synteza)

Zakładamy, że $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, czyli energia *f* jest skończona: ||*f*||=$\int |f(t)|^2 dt < \infty$

Iloczyn skalarny (metryka):

$$\langle x(t), y(t) \rangle_{\mathrm{L}^2} = \int_{t\in\mathbb{R}} x(t) y(t)^* dt$$

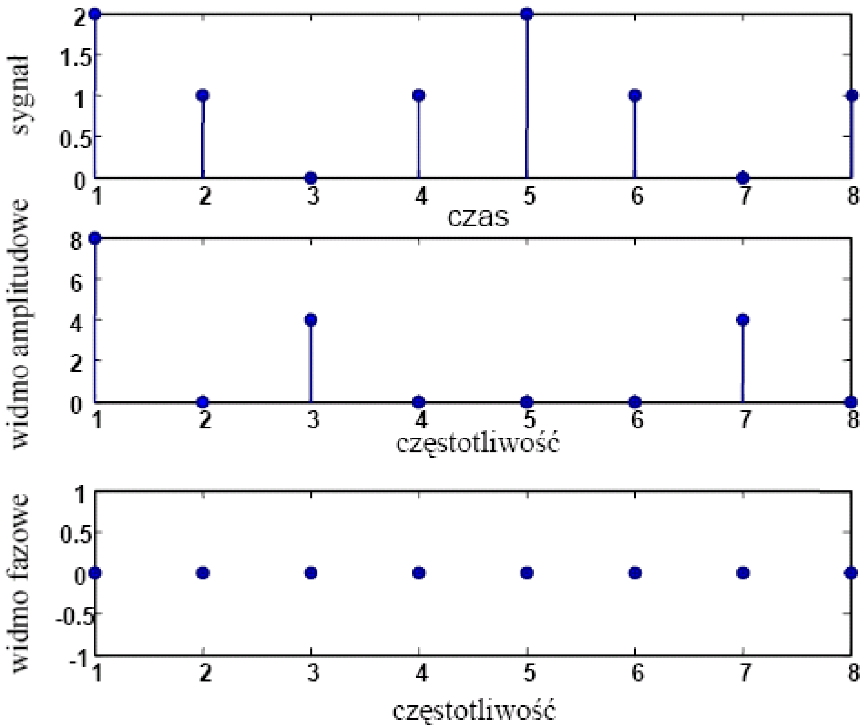
operator TF: $F = \hat{f} : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

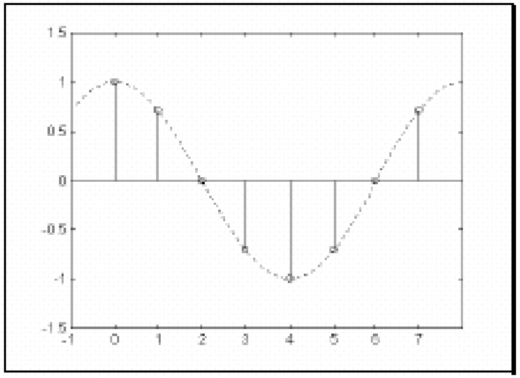
ciągła:

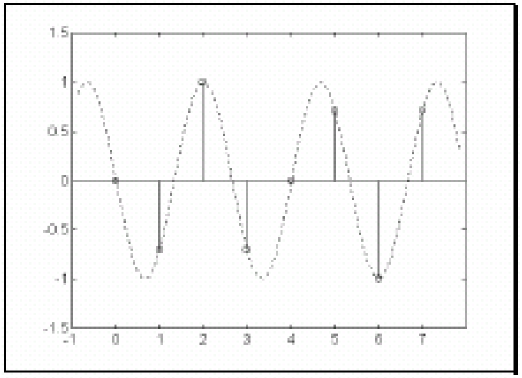
$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-i\omega t} dt$$

dyskretna:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$







Theorem 4.8 (Sampling Theorem (Shannon-Whittaker-Kotelnikov-Raabe)) Let h be the ideal lowpass filter with cut-off frequency π/T and gain T as given in (4.37), and let the input to the sampling and interpolation system shown in Figure 4.19 satisfy $x \in BL[-\Omega/2, \Omega/2]$. If $\Omega < 2\pi/T$, then $\widehat{x} = x$. In particular, this means that the samples $\{x(nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ are a sufficient characterization of $x(t)$ and the reconstruction formula

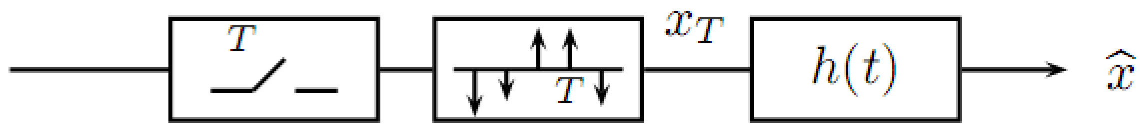
$$x(t) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT)\mathrm{sinc}(\pi(t/T - n))$$

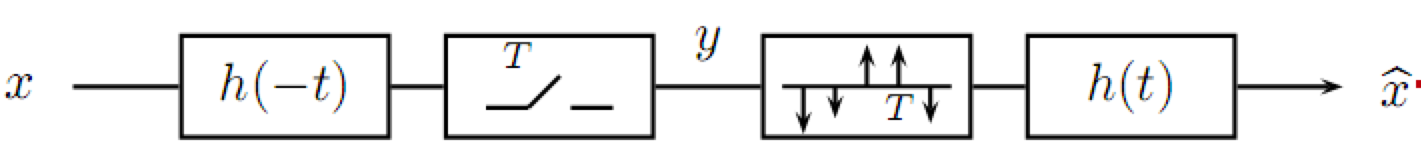
holds.

Corollary 4.9 (Bandlimited Approximation) Let Ω be any positive number and let x be any function in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. The least-squares approximation of x in $BL[-\Omega/2, \Omega/2]$ is computed by the sampling and interpolation system shown in Figure 4.18 where $T = 2\pi/\Omega$ and h is given by (4.38). In particular, this means that the samples $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ are a sufficient characterization of the approximation $\widehat{x}(t)$ and the formula

$$\widehat{x}(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \mathrm{sinc}(\pi(t/T - n))$$

holds.

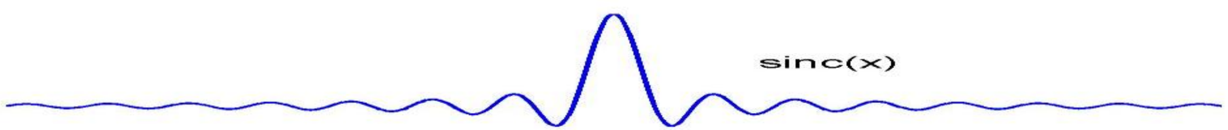


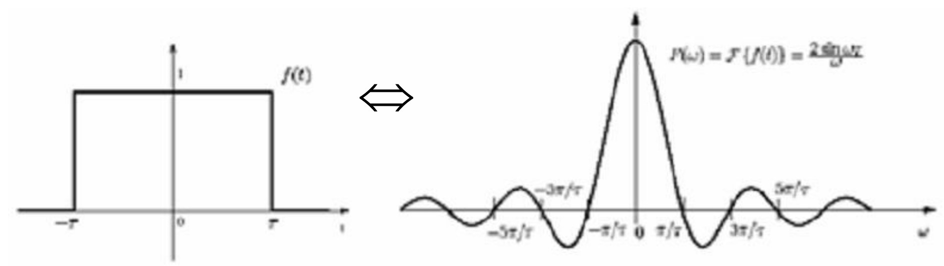


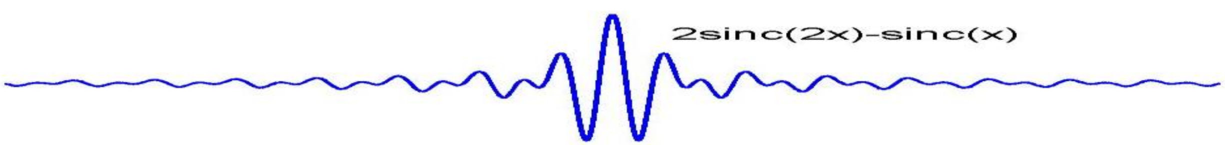
Falki Shannona

- Shannonowska funkcja przesłony:

$$\psi^{\text{Shannon}}(x) = 2\,\mathrm{sinc}\,(2x) - \mathrm{sinc}\,(x)$$



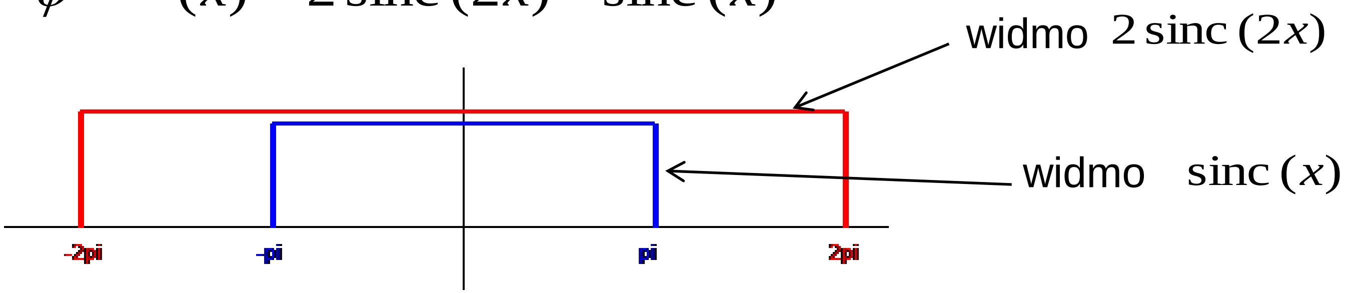




- $\{\psi_{j,k}^{\text{Shannon}}(x) : j,k \in Z\}$ jest orthonormalną bazą przestrzeni $L^2(R)$

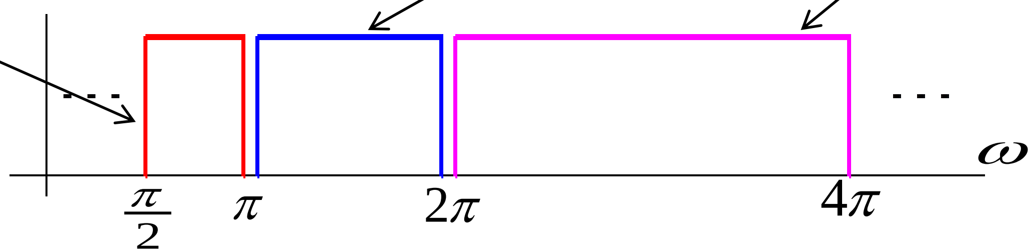
Falki Shannona

- Widmo $\psi^{\text{shannon}}(x) = 2\,\mathrm{sinc}\,(2x) - \mathrm{sinc}\,(x)$



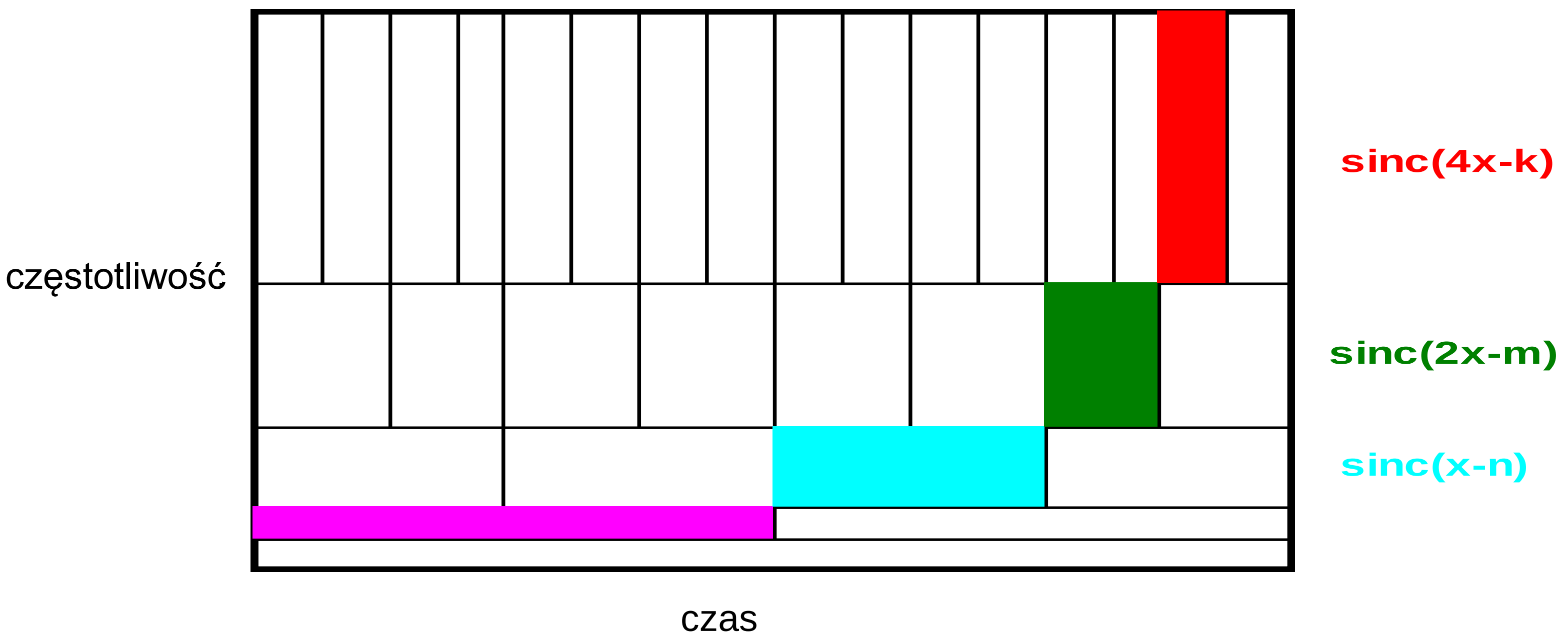
- Reprezentacja sygnałów:
  - ograniczonych do pasma $(-\pi, \pi)$ można opisać za pomocą sinc(x-n)…
  - ograniczonych do $(-2\pi, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, za pomocą $\psi(x-n)$
  - ograniczonych do $(-4\pi, 2\pi) \cup (2\pi, 4\pi)$, za pomocą $\psi_{-1,n} = \sqrt{2}\psi(2x-n)$
  - ...

$$\psi_{1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{x}{2} - n\right)$$



Podział przestrzeni czas-częstotliwość (położenie-skala)

- Zasada nieoznaczoności Heisenberga, czyli atomy położenie-częstotliwość: $\Delta x \cdot \Delta t \geq 2\pi$
- Dobór atomów zależnie od charakteru sygnału



FALKI

Falki czyli natura

Falki odzwierciedlają naturalny charakter informacji (treści) obrazowej

Yves Meyer:

Falki, gdziekolwiek one są …, nie pomagają nam wyjaśnić faktów naukowych, ale <u>pozwalają opisać</u> rzeczywistość wokół nas, bez względu na to jak bardzo jest naukowa …

Falkowe korzyści:

- Naturalny opis obrazu w wielu skalach
- Hierarchia i zależność informacji
- Selektywność informacji
- Upakowanie informacji
- Łatwiejsza identyfikacja informacji użytecznej
- Składanie (synteza) informacji w różnej postaci
- Klasyfikacja jakościowa i ilościowa

Poszukujemy reprezentacji!!! - nie interpretacji

- Benoit Mandelbrot: “Świat wokół nas jest bardzo złożony. Narzędzia opisu świata, jakimi dysponujemy, są bardzo słabe.”
- Pitagoras: „nie wyrażaj małej rzeczy w wielu słowach, lecz rzecz wielką w niewielu”
- Pitagoras: „liczba jest istotą wszystkich rzeczy”
- Stefan Kisielewski: „wszak istotą jest zasada, nie zaś elementy, poprzez które się ona realizuje”
- Ważna jest relacja:

opis (reprentacja-model)

uwarunkowania fizyczne

interpretacja (semantyka)

Definicja falki

- Falka to funkcja *f* o następujących właściwościach:
  - a) $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, czyli energia *f* jest skończona: $\int |f(t)|^2 dt < \infty$
  - b) wartość średnia *f* wynosi zero, tj. $\int f(t)dt = 0$

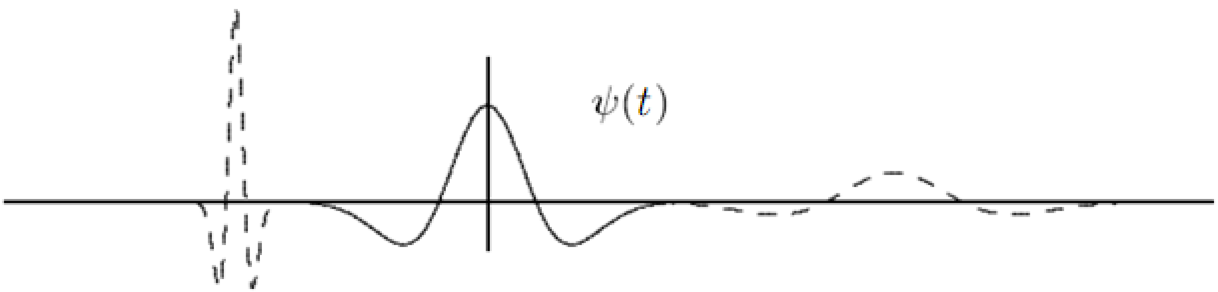
  Warunki te wymuszają co najmniej kilka oscylacji
  - c) alternatywnie do a) i b): $\int \frac{|F(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$

  Warunki a) i b) *oraz* c) *są równoważne, jeśli f zanika szybciej niż* $|t|^{-1}$ *dla* $t \to \infty$
- Cechy:
  - silnie wyróżniona jest lokalizacja w czasie, tj. funkcja jest 'lokalna'
    - nośnik (zbiór niezerowych wartości) jest zwarty (czyli domknięty i ograniczony) i niepusty
    - nośnik jest 'prawie zwarty' (widmo częstotliwościowe ma zwarty nośnik)
    - kształt przypomina gasnące pobudzenie ośrodka, tj. falę z gasnącymi amplitudami kolejnych oscylacji oddalających się od zaburzenia centralnego

Transformacja falkowa

- Baza przekształcenia liniowego: rodzina falek

$$\psi^{s,x}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{t-x}{s}\right), \qquad s \neq 0$$



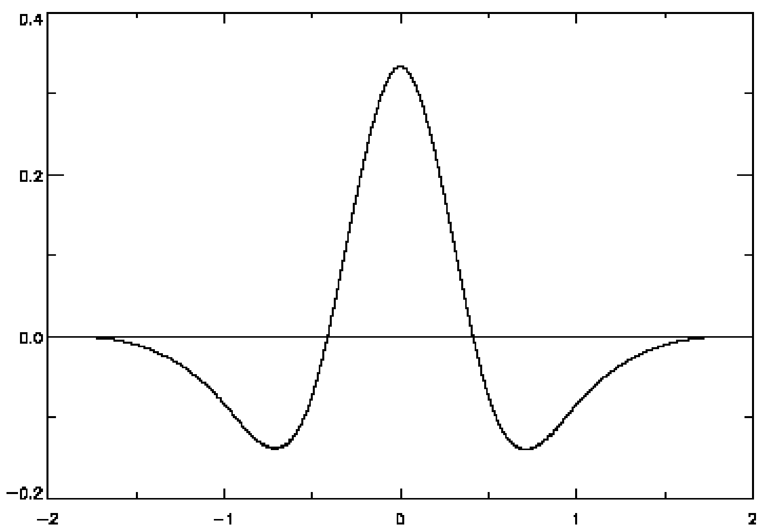
- Transformacja falkowa (ciągła)

$$\mathcal{W}_f(s,x) = < f, \psi^{s,x} > = \int f(t)\frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi^*\left(\frac{t-x}{s}\right)dt$$

Ciągła transformacja falkowa

Przykład: kapelusz meksykański:

$$g(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



A Wavelet Tour of Signal Processing
Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

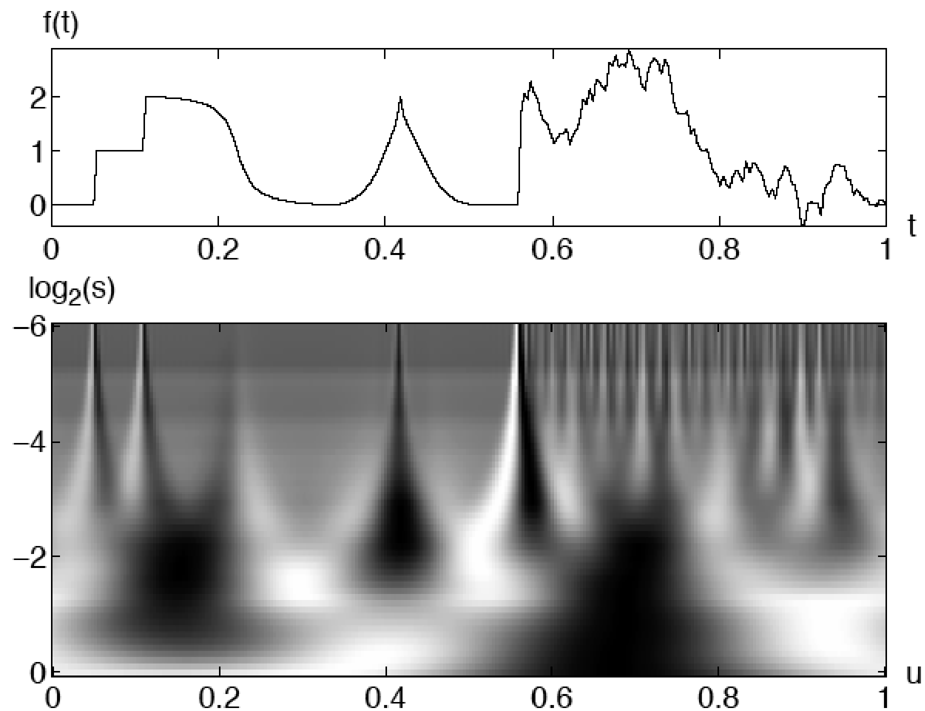


Figure 4.7: Real wavelet transform $Wf(u,s)$ computed with a Mexican hat wavelet. The vertical axis represents $\log_2 s$. Black, grey and white points correspond respectively to positive, zero and negative wavelet coefficients.

Ciągła transformacja falkowa - synteza

rekonstrukcja: $f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \frac{1}{\sqrt{|s|}} W_f(s,x) \psi\left(\frac{t-x}{s}\right) ds dx$

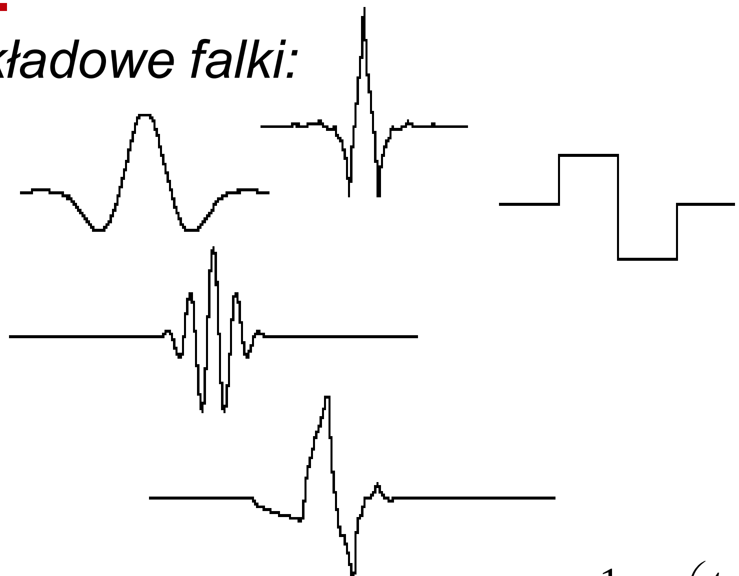
warunek na falki: $C_\psi = \int |\psi(t)|^2 \frac{dt}{t} < \infty$

warunek uproszczony: $\psi(0) = 0$

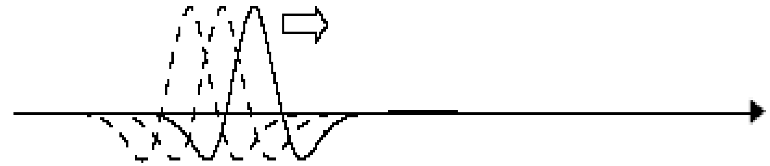
Problemy z dokładną rekonstrukcją – rozwiązanie:
transformacja dyskretna

Problem doboru bazy przekształcenia

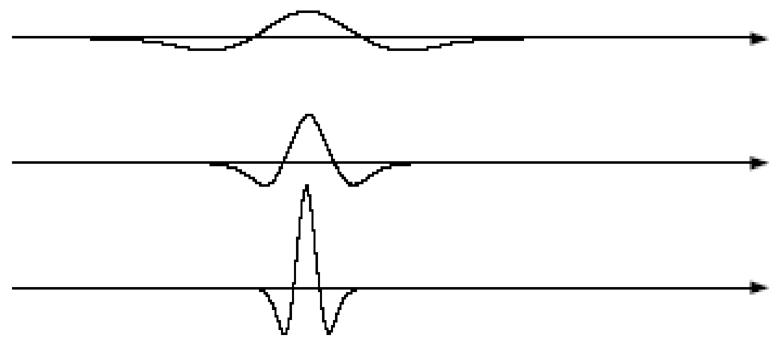
przykładowe falki:



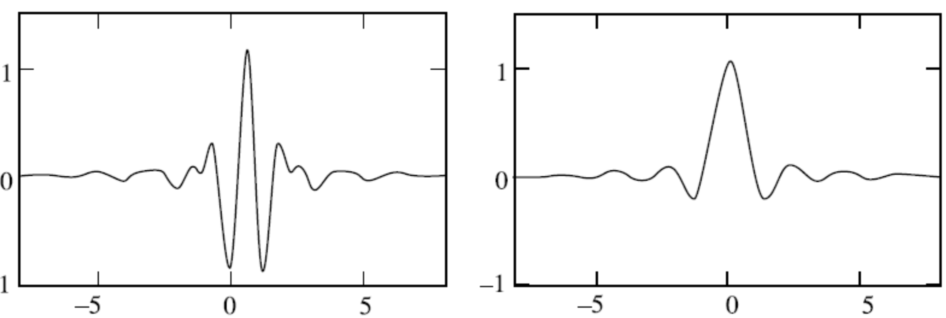
baza falkowa: translacja



skalowanie

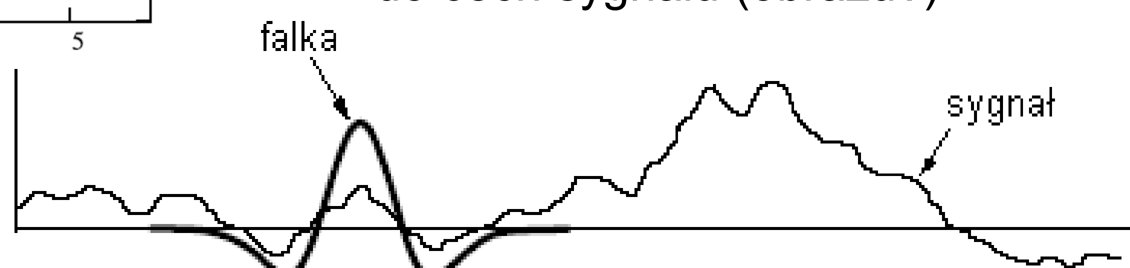


$$\psi^{s,x}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{t-x}{s}\right), \quad s \neq 0$$



falka Meyera wraz z funkcją skalującą

Baza funkcji dopasowanych do cech sygnału (obrazu?)



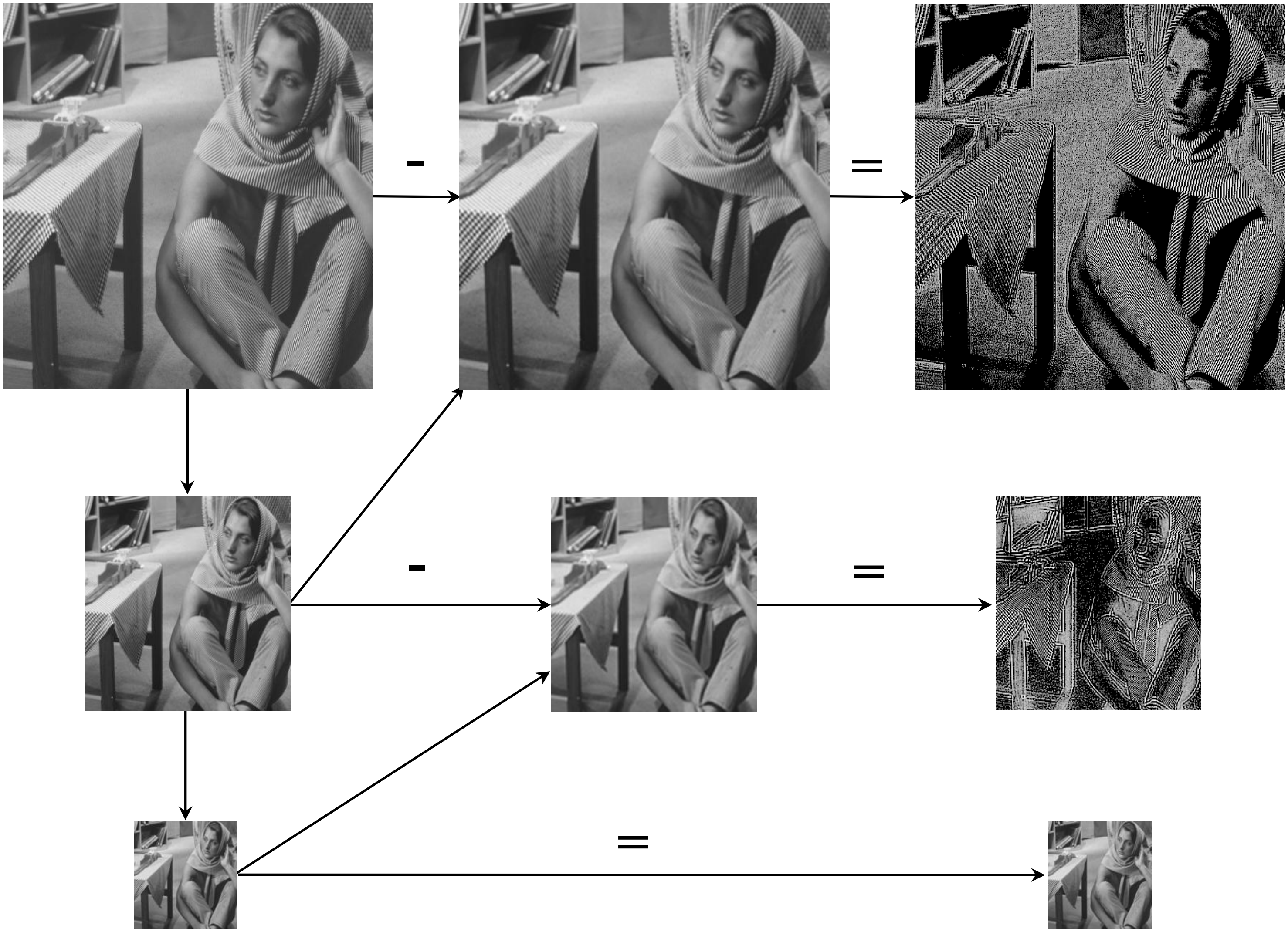
APROKSYMACJA WIELOROZDZIELCZA

Analiza (aproksymacja) wielorozdzielcza

- Teoria nawiązująca do piramid wieloskalowych (Gaussa, Laplace'a)
- Efekt: praktyczny schemat liczenia dyskretnej transformacji falkowej
- Istnieją algorytmy alternatywne

- Wielorozdzielczość - jednoczesne występowanie wielu skal w reprezentacji sygnału
- Zasadnicza idea:
  - dekompozycja funkcji na centralną reprezentację zgrubną (niskorozdzielczą) oraz sekwencję reprezentacji szczegółowych (wysokorozdzielczych)
  - procedura dekompozycji zakłada kolejne aproksymacje sygnału z malejącą rozdzielczością (rosnącą skalą)

Hierarchiczna piramida



Definicja MRA (*multiresolution analysis/approximation*)

Definicja 3.1 *O aproksymacji wielorozdzielczej (Mallat)*
Aproksymacją wielorozdzielczą jest ciąg $\{V_m\}_{m\in\mathbf{Z}}$ domkniętych podprzestrzeni $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$, takich że:

a) $\forall_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2} f(t) \in V_m \Longleftrightarrow f(t-n2^m) \in V_m$ (niezmiennicza względem przesunięcia, skalowanie z dwójką)

b) $\forall_{m\in\mathbf{Z}} V_{m+1} \subset V_m$ (skalowanie)

c) $\forall_{m\in\mathbf{Z}} f(t) \in V_m \Longleftrightarrow f(\frac{t}{2}) \in V_{m+1}$ (skalowanie przez 2)

d) $\lim_{m\to+\infty} V_m = \bigcap_{m=-\infty}^{+\infty} V_m = \{0\}$ (zerowanie reprezentacji zgrubnej – wytracenie całej energii w reprezentacjach szczegółowych)

e) $\lim_{m\to-\infty} V_m = \overline{\bigcup_{m\in\mathbf{Z}} V_m} = \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ (rozpinanie przestrzeni do L^2(R))

f) istnieje funkcja $\phi \in V_0$ taka, że $\{\phi(t-n)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ jest bazą Riesza w centralnej podprzestrzeni V_0 (istnienie centralnej podprzestrzeni z bazą Riesza)

□

Bezpośrednie konsekwencje MRA

- Dwie kluczowe operacje: skalowanie i przesuwanie
- Zupełność przestrzeni opisu sygnału w $L^2(R)$ (przypadek p. Hilberta)
- Znaczy to, że energia każdego sygnału w V_0 jest ograniczona i rozwinięcia funkcji w bazie tej podprzestrzeni są ograniczane dodatkowymi warunkami
- Każdą funkcję $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ można aproksymować z dowolną dokładnością - za pomocą rzutów na V_m :

$$\lim_{m \to -\infty} P_{V_m} f = f$$

lub też z utratą wszystkich szczegółów:

$$\lim_{m \to +\infty} P_{V_m} f = 0$$

Baza centralnej podprzestrzeni V_0

- Baza Riesza jest uogólnieniem pojęcia bazy ortonormalnej - w centralnej podprzestrzeni V_0 określa skrajne warunki na postać transformacji realizujących analizę wielorozdzielczą sygnałów
- $\mathcal{B}_\phi = \{\phi(t-n)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ jest bazą przestrzeni V_0 ($V_0 = span(\mathcal{B}_\phi)$) , której funkcje są liniowo niezależne
- współczynniki $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \in l^2(\mathbf{Z})$
- istnieją dwie dodatnie stałe *A* i *B* ($0 < A \leqslant B < \infty$) takie, że zachodzi warunek:

$$A\|\{a_n\}\|^2 \leqslant \|\sum_n a_n\phi(t-n)\|^2 \leqslant B\|\{a_n\}\|^2$$

- znaczy to, że rozwinięcia dowolnej funkcji przestrzeni $L^2(R)$ są numerycznie stabilne w danej bazie
- Wśród różnych postaci bazy numerycznie stabilnej szczególnie użyteczną jest baza ortonormalna, dla której *A*=*B*=1, czyli dla dowolnej $f \in V_0$ o reprezentacji $f = \sum_n a_n\phi(t-n)$ zachodzi

$$\|f\|^2 = \sum_n |a_n|^2$$

Baza ortonormalna

- Jeśli $\mathcal{B}_\phi$ jest bazą Riesza, to można znaleźć postać taką postać $\{\phi(t-n)\}_{n\in\mathbf{Z}}$, by była to baza ortonormalna (uprasza się ostatni warunek MRA do baz ortonormalnych)
- Najbardziej naturalną jest rodzina funkcji postaci

falka

$$\psi^{s,x}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{t-x}{s}\right), \qquad s \neq 0$$

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\phi(2^{-m}t-n)$$

o skali 2^m i współczynnikach skalujących

$$a_{m,n} = \left\langle f, \phi_{m,n} \right\rangle$$

- Jest to baza funkcji skalujących (aproksymujących) ze skalującą funkcją podstawową ϕ

Równanie skalujące

- Podstawowa funkcja skalująca dla V_0 to $\phi(t) = \phi_{0,0} \in V_0$

- Z MRA mamy $V_0 \subset V_{-1}$, co oznacza że również $\phi(t) \in V_{-1}$, czyli można ją rozwinąć w V_{-1} za pomocą funkcji bazowych

$$\boxed{\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\phi(2^{-m}t - n)}$$

$$\phi_{-1,n} = \sqrt{2}\phi(2t - n)$$

otrzymujemy wtedy **równanie skalujące**:

$$\phi(t) = \sqrt{2}\sum_n h_n \phi(2t - n)$$

gdzie h_n to współczynniki rozwinięcia w bazie V_{-1} (interpretowane jako współczynniki dyskretnego filtru *h* skojarzonego z bazą funkcji skalujących), przy czym

$$h_n = \sqrt{2}\int \phi(t)\phi(2t - n)dt$$

Filtry skalujące (dolnoprzepustowe)

- Z warunku ortonormalności w dziedzinie częstotliwości wynika zależność

$$\underset{\omega\in\mathbf{R}}{\forall}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\,\Phi(\omega+2k\pi\,|^{2}=1$$

co w połączeniu z interpretacją równania skalującego w dziedzinie częstotliwości daje warunek na filtry ($H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_n e^{-j\omega n}$)

$$|\,H(\omega)\,|^{2}+|\,H(\omega+\pi)\,|^{2}=2$$

- Dyskretne filtry spełniające ten warunek nazywane są sprzężonymi filtrami lustrzanymi (*conjugate mirror filters*)
- Ortogonalność jest kontrolowana przez liczbę „zer w π" (tj. $H(\omega=\pi)=0$)

co jest często wykorzystywane przy projektowaniu bazy funkcji skalujących - to rozwiniemy później

Falkowa przestrzeń uzupełniająca

- dopełnienie informacji o szczegółach w danej skali
- szczegóły potrzebne do zwiększania rozdzielczości aproksymacji V_m funkcji *f* zawarte są w uzupełniających podprzestrzeniach W_m takich, że
- $W_m \subset V_{m-1}$
- Jeśli W_m jest ortogonalne do V_m , to jest jego dopełnieniem do V_{m-1} uzupełniającym energię sygnału:

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m$$

oraz w odniesieniu do kolejnych skal aproksymacji:

$W_m \perp W_{m'}$ dla $m \neq m'$ oraz $W_{m'} \subset V_m \perp W_m$ przy $m' > m$

co daje dla kolejnych przestrzeni ortogonalnych

$$V_{m-1} = V_{m'} \oplus \bigoplus_{i=0}^{m'-m} W_{m'-i}$$

- Podprzestrzenie W_m są rozpinane przez ortogonalne bazy falkowe

Baza falkowa

- Ortogonalny rzut funkcji *f* na podprzestrzeń szczegółów W_m jest rozwinięciem w ortonormalnej bazie falkowej tej podprzestrzeni:

$$P_{W_m} f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} < f, \psi_{m,n} > \psi_{m,n}$$

zachodzi też:

$$P_{W_m} f = \Delta P_{V_m} f = P_{V_{m-1}} f - P_{V_m} f$$

oraz

$$f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{W_m} f = \sum_{m,n \in \mathbf{Z}} < f, \psi_{m,n} > \psi_{m,n} = \sum_{m,n \in \mathbf{Z}} c_{m,n}(f) \psi_{m,n}$$

gdzie $c_{m,n} = \left\langle f, \psi_{m,n} \right\rangle$ to współczynniki falkowe

- Zbiór funkcji $\{\psi_{m,n}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ jest <u>falkową bazą </u>ortonormalną podprzestrzeni W_m

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m} t - n)$$

Równanie falkowe

- Związek pomiędzy bazą falkową i bazą funkcji skalujących, wynikający z MRA oraz koncepcji uzupełnienia, ma postać <u>równania falkowego</u>:

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_n g_n \phi(2t-n) = \sum_n (-1)^{1-n} h_{1-n}\phi(2t-n)$$

  współczynniki górnoprzepustowego filtru lustrzanego *g*:

$$g_n = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(t), \phi(2t-n) \right\rangle$$

- Zależności pomiędzy współczynnikami skalującymi i falkowymi kolejnych skal aproksymacji w dekompozycji (analizie) *f* są następujące:

$$a_{m,n}(f) = \sum_k h_{k-2n} a_{m-1,k}(f) \qquad c_{m,n}(f) = \sum_k g_{k-2n} a_{m-1,k}(f)$$

  są to filtrowe odpowiedniki równania skalującego i falkowego
- Przy rekonstrukcji:

$$a_{m-1,n}(f) = \sum_k [h_{n-2k} a_{m,k}(f) + g_{n-2k} c_{m,k}(f)]$$

Filtry falkowe

- Na podstawie MRA i dopełnień podprzestrzeni istnieje związek:

Twierdzenie 3.2 *O ortonormalnej bazie falek (Mallat, Meyer)*

$$\Psi(\omega) = 2^{-1/2} G(\omega/2) H(\omega/2) \quad \text{przy} \quad G(\omega) = e^{-i\omega} H^*(\omega + \pi)$$

- Konstrukcje filtrów (baz) falkowych są bardzo różnorodne ….

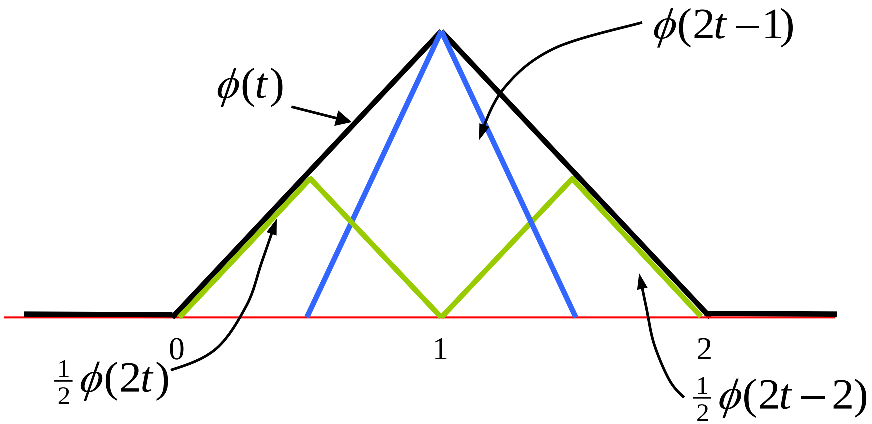
KONSEKWENCJE PRAKTYCZNE

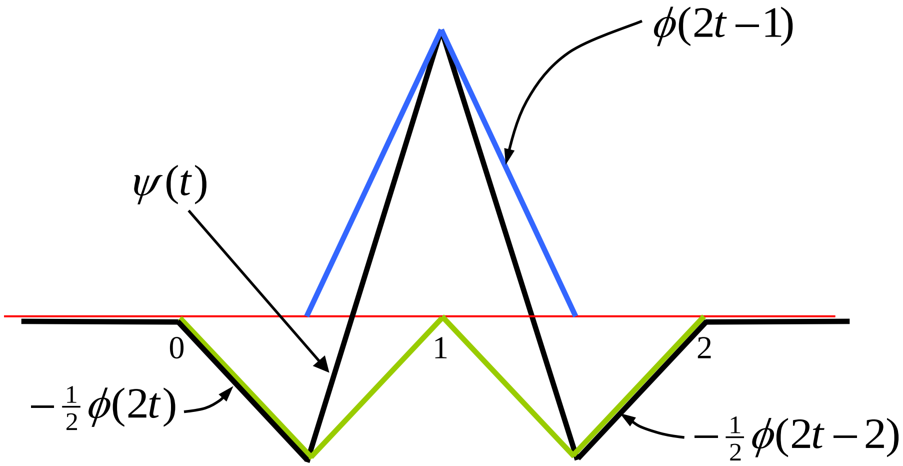
Przykładowe realizacje skalowania i filtrowej reprezentacji bazy falkowej

Filtry sprzężone z funkcjami skalującymi – falkami:

$$\phi(t) = \sqrt{2}\sum_n h_n \phi(2t-n)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_n \tilde{g}_n \phi(2t-n)$$



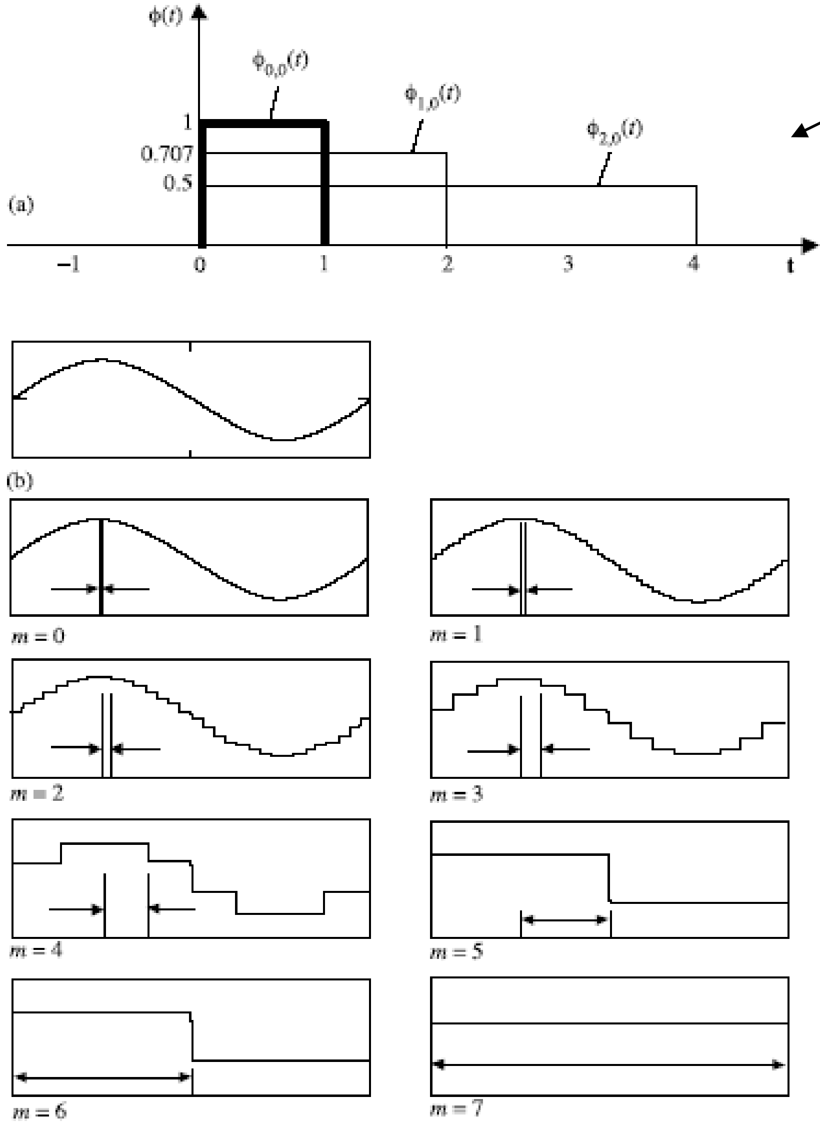


$$h_0 = h_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

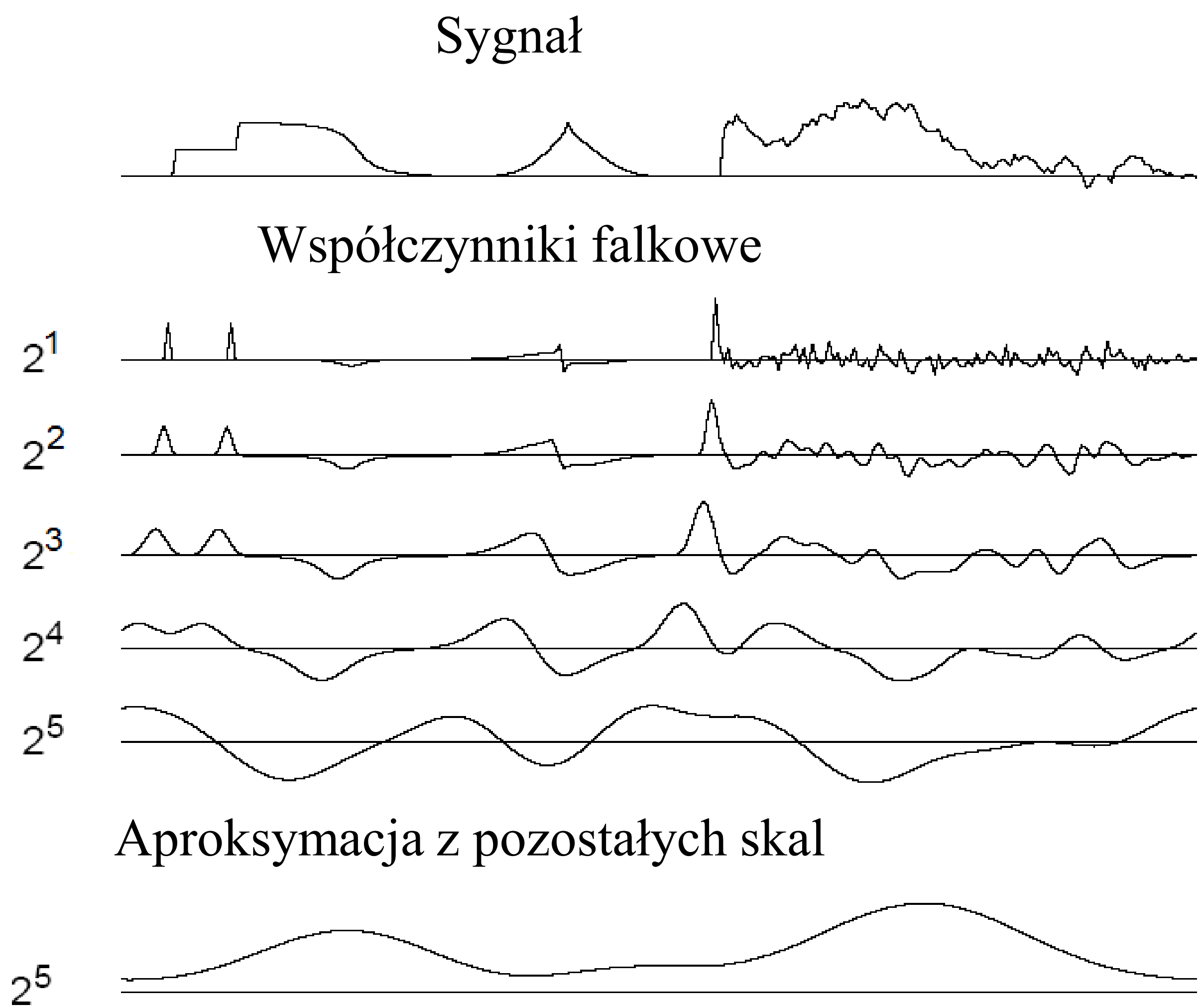
$$g_0 = g_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Aproksymacja sygnału w różnych skalach

funkcje skalujące

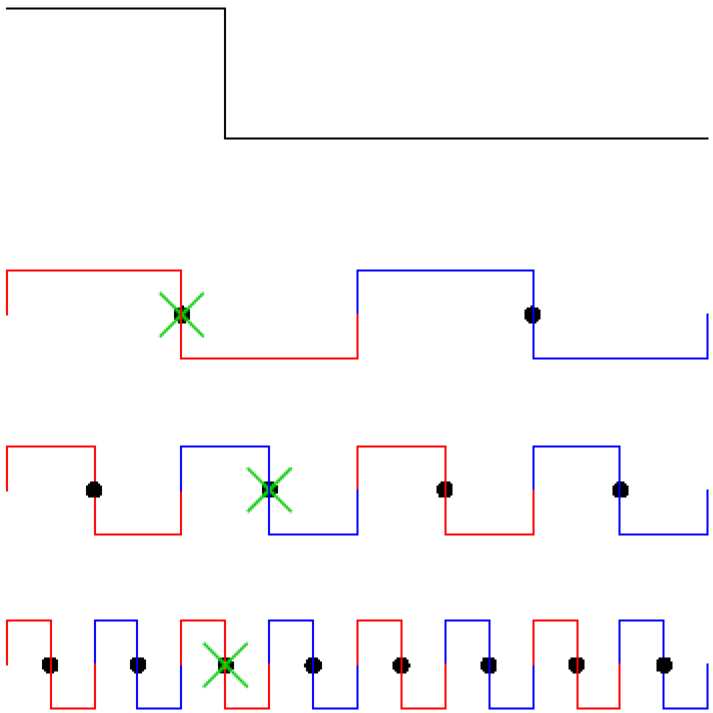


Detale i przybliżenia

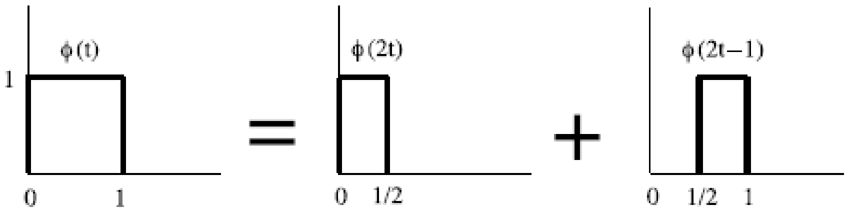


Dokładność w przybliżeniu

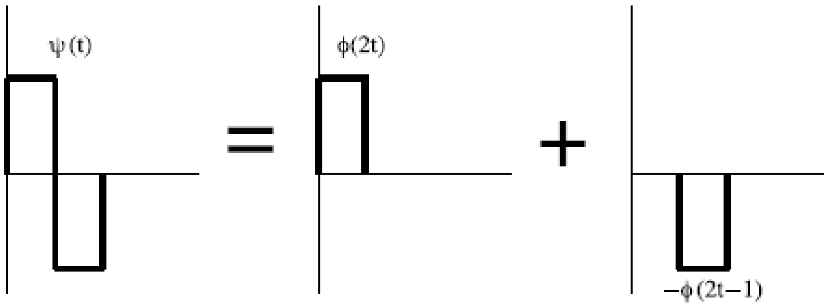
Lokalna charakterystyka sygnału (nieciągłości, osobliwości) – upakowanie energii w określonych miejscach przestrzeni falkowej



Falka Haara i baza ortogonalna



konstruowanie funkcji skalującej

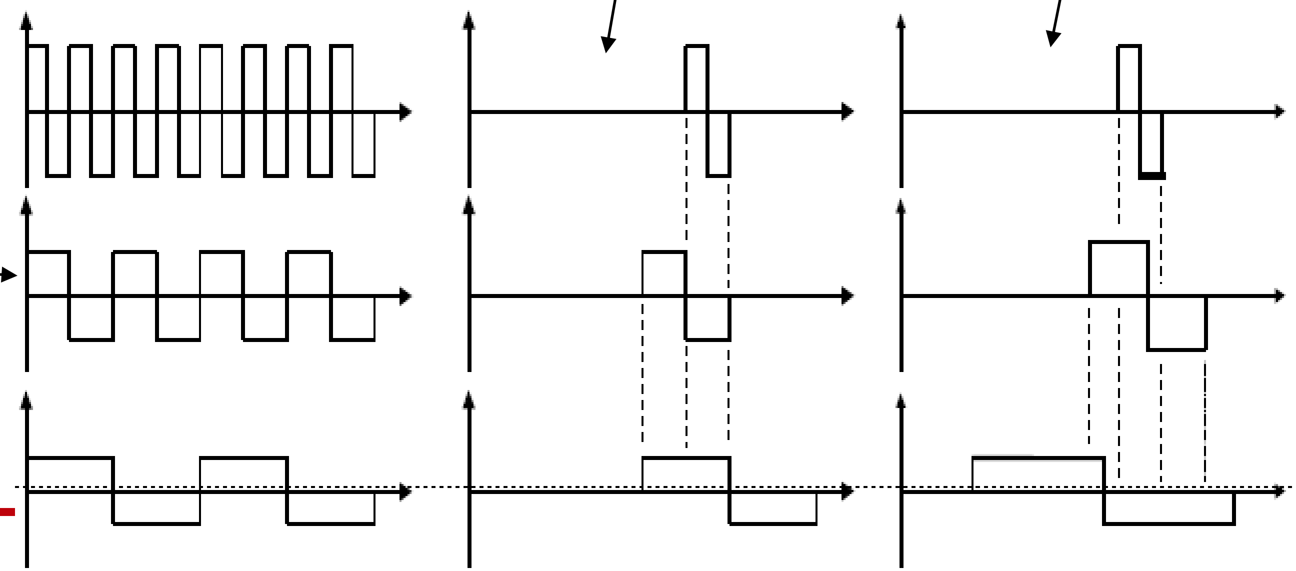


konstruowanie falki

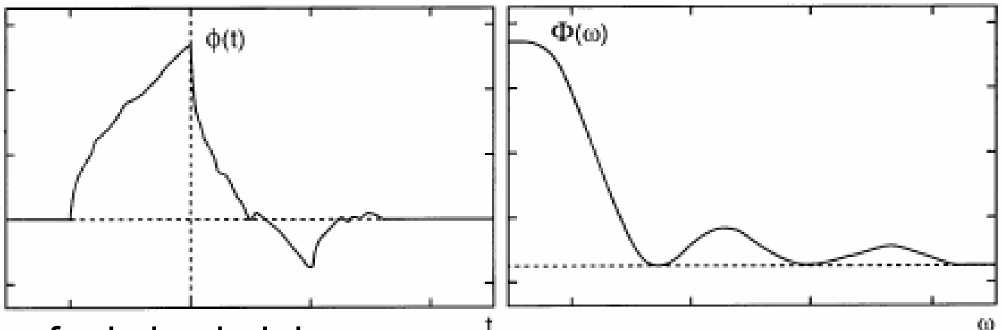
falki nie są wzajemnie ortogonalne w innej skali

baza ortogonalna w skali diadycznej

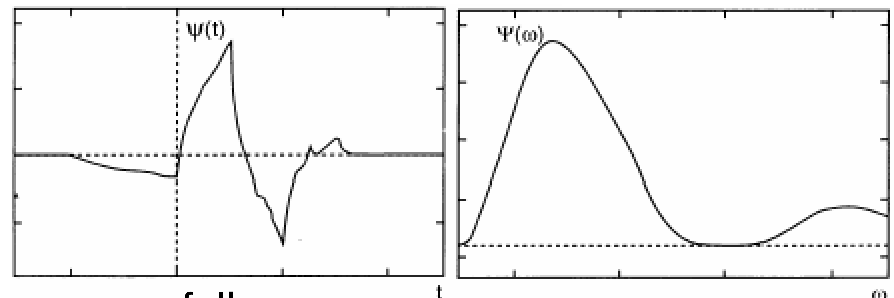
skala diadyczna



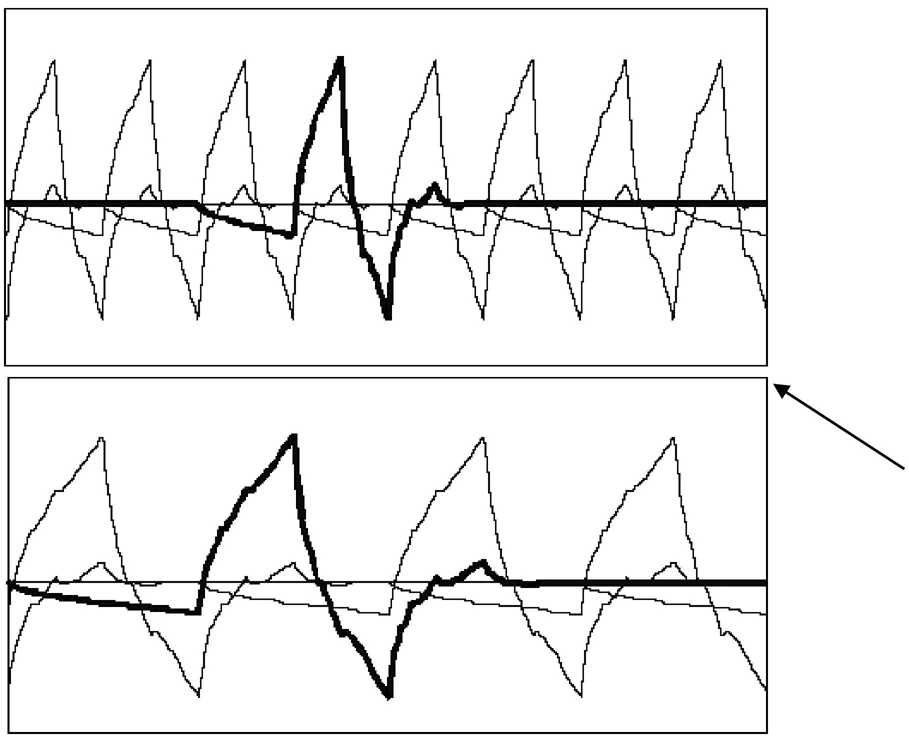
Falka Daubechies



funkcja skalująca

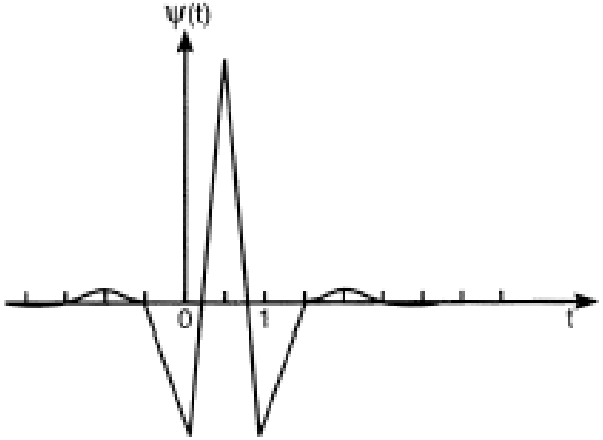


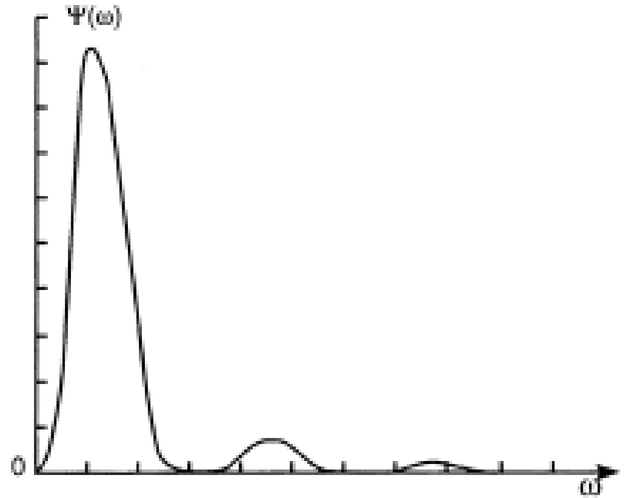
falka



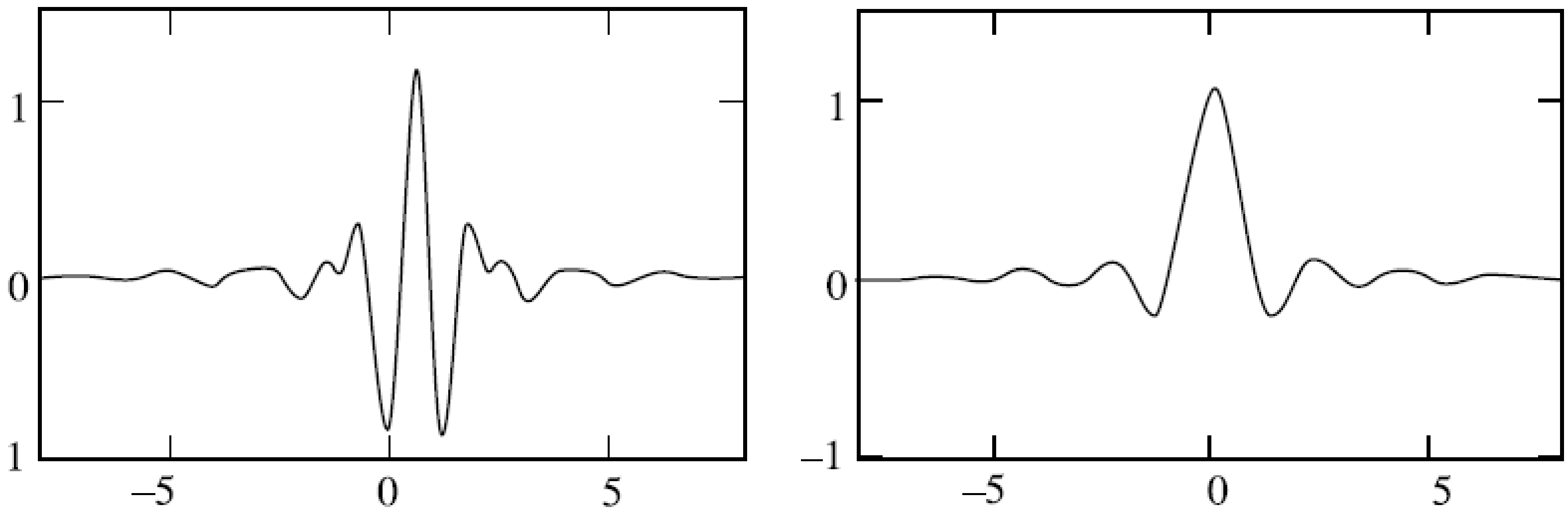
baza falkowa (różne skale, przesunięcia)

Inne falki



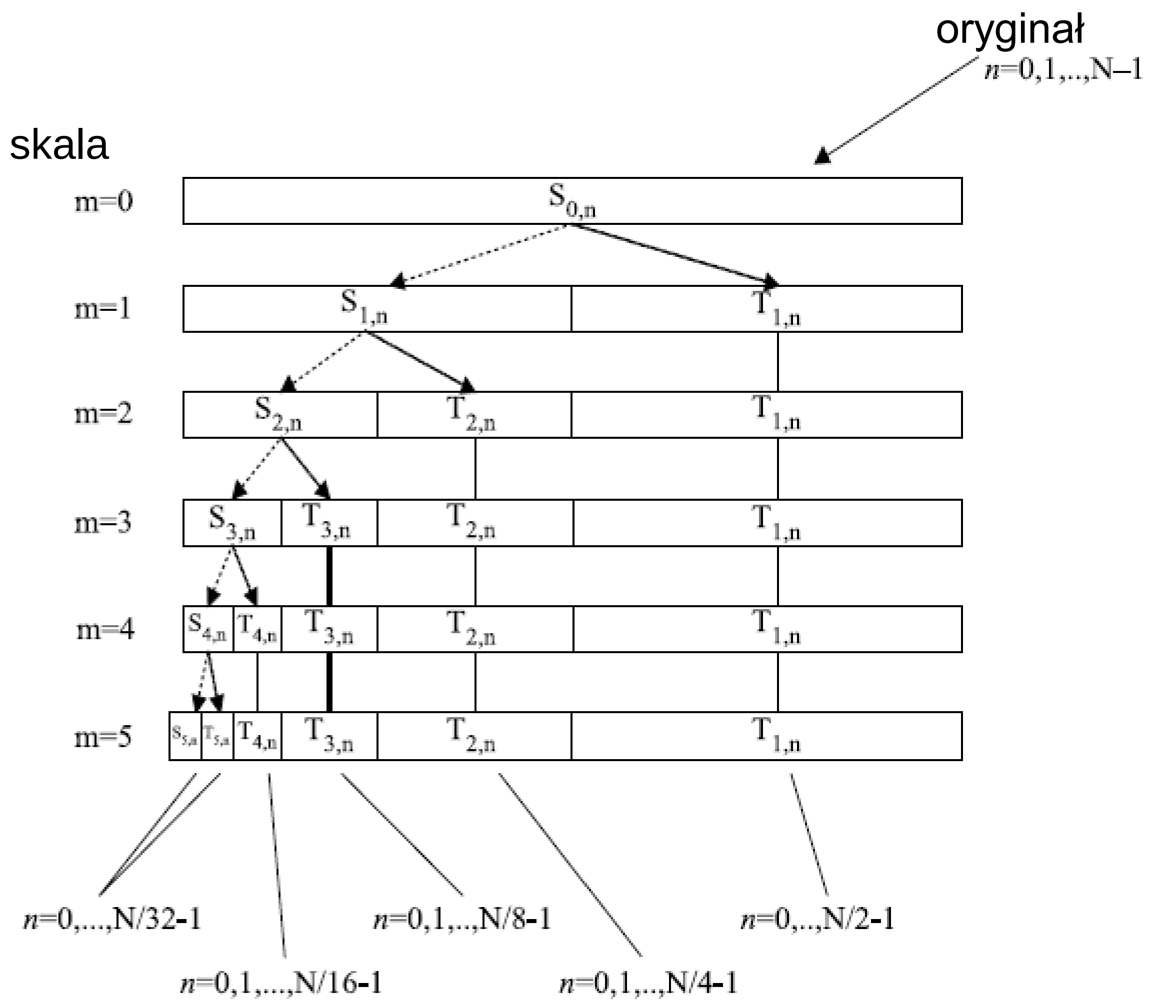


falka Lemarie-Battle

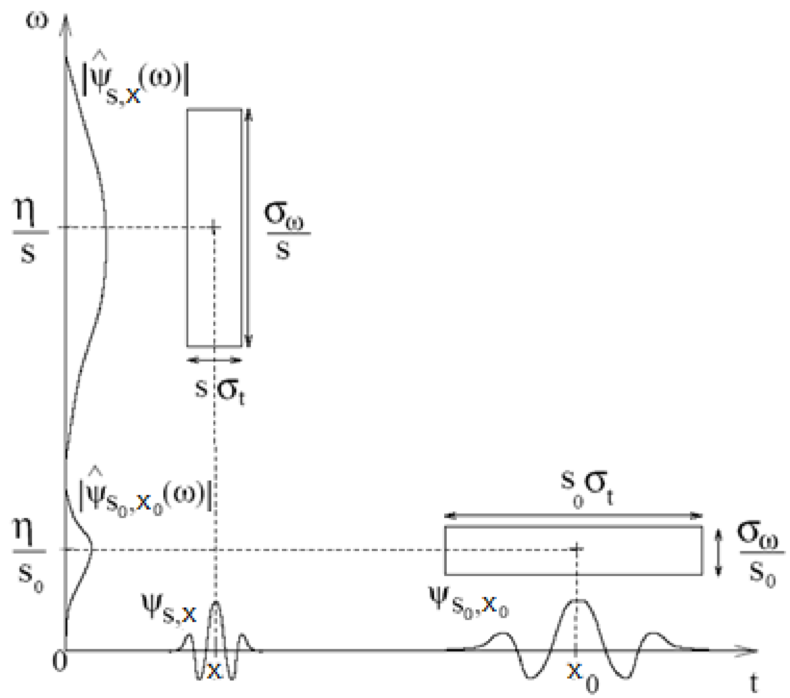


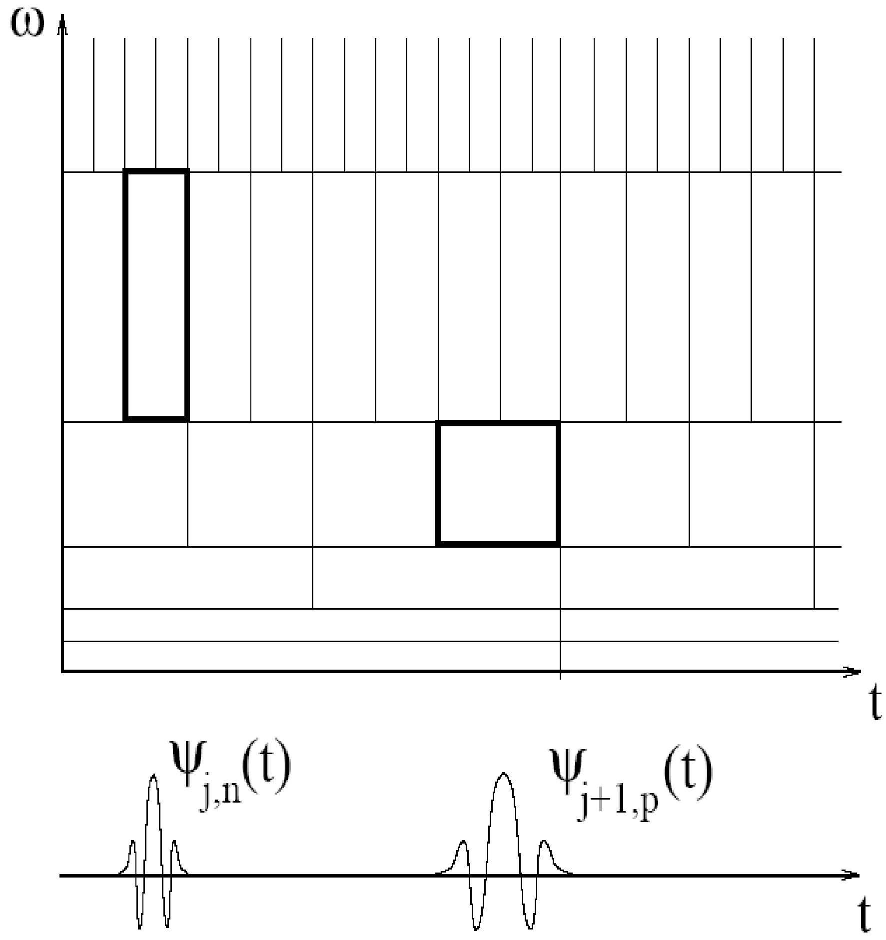
falka Meyera wraz z funkcją skalującą

Rozkład podpasm dekompozycji



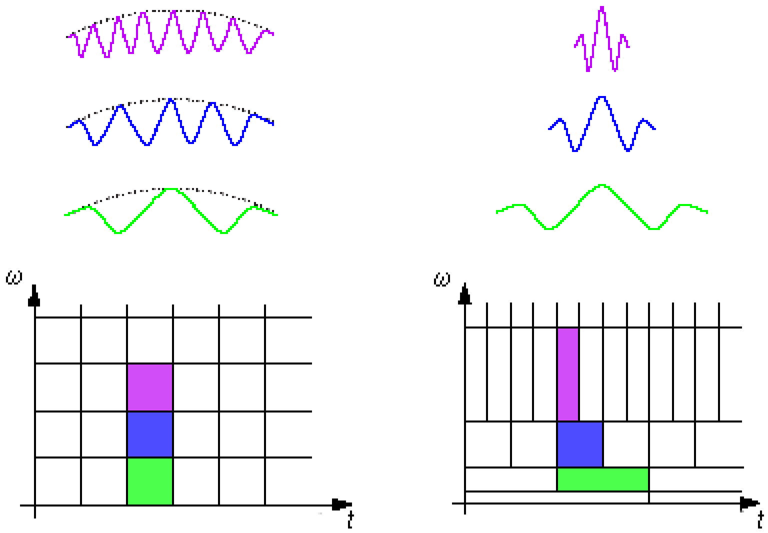
Falkowa dziedzina



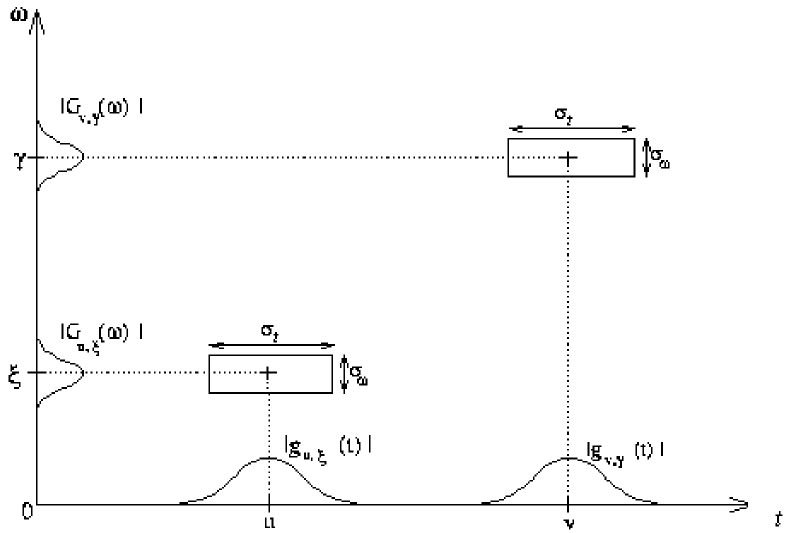


Dzielą przestrzeń czas-częstotliwość na ‘różne atomy’

Alternatywy



Okienkowa transformacja Fouriera:



$$\mathbf{F}_x^S(t,\omega) = \langle x, g_{t,\omega} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(\tau - t) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Transformacje "krótkoczasowe„:

$$S_x(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t,\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

gdzie estymata lokalnej funkcji autokorelacji sygnału *x(t)* w otoczeniu chwili czasowej t:

$$R_x(t,\tau) = E_i\left\{x(t+\tfrac{\tau}{2})x^*(t-\tfrac{\tau}{2})\right\}$$

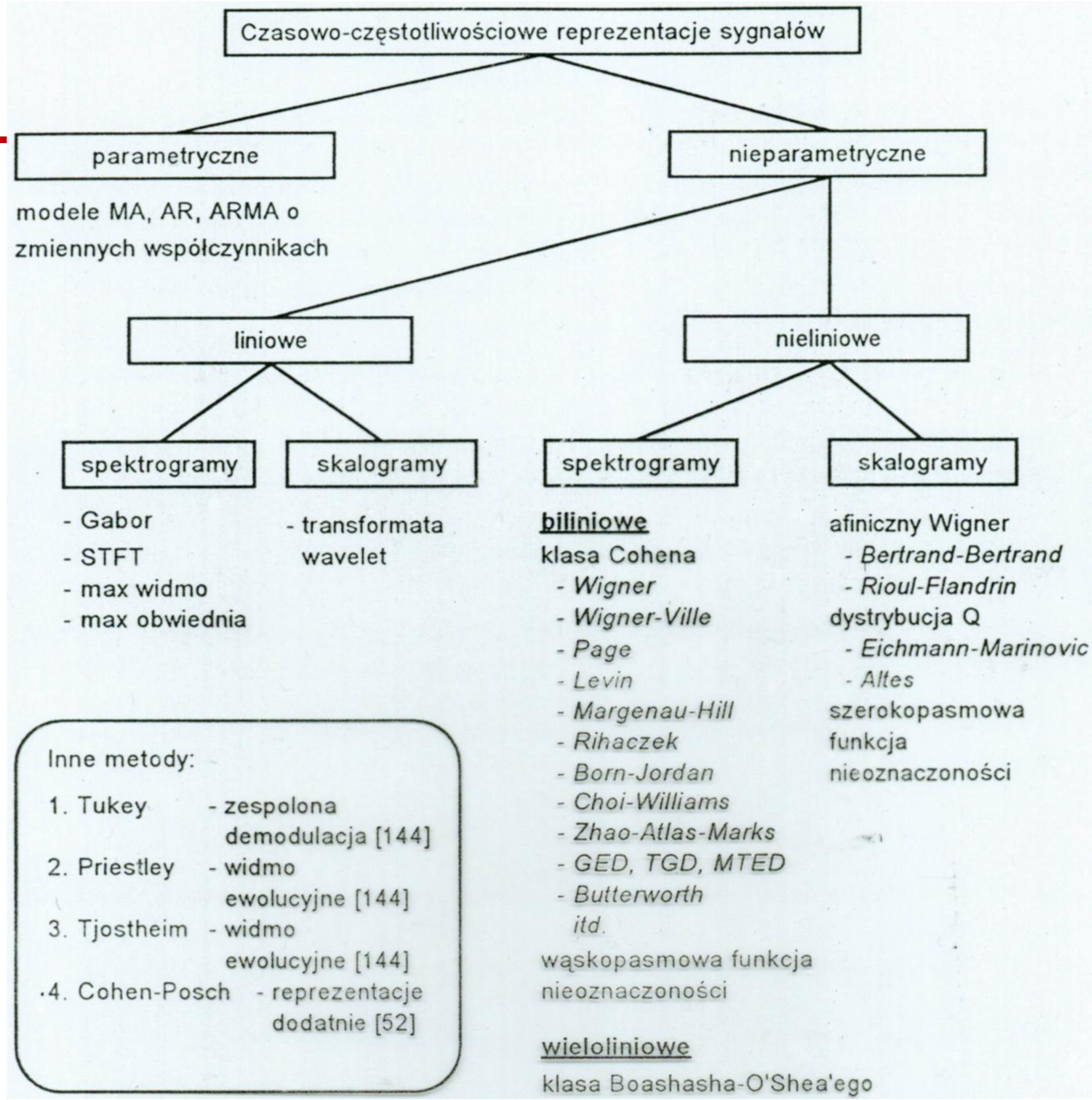
W najprostszym przypadku można napisać:

$$S_x(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|h(\tfrac{\tau}{2})\right|^2 x(t+\tfrac{\tau}{2})x^*(t-\tfrac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Przykładowo, klasyczna transformata Wignera:

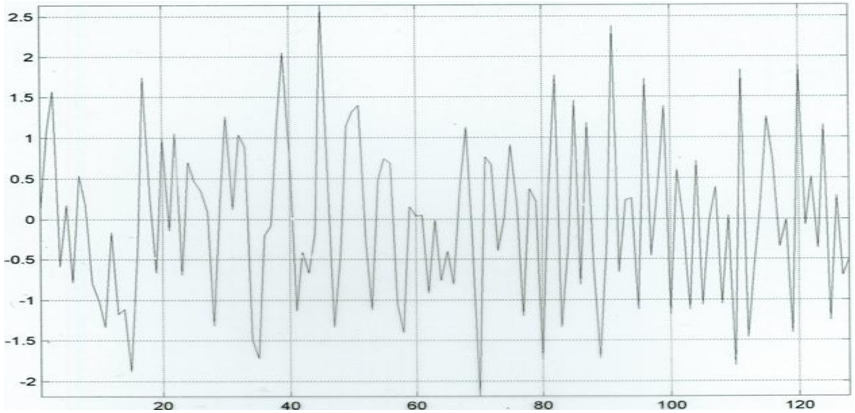
$$S_x^W(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\frac{\tau}{2})x^*(t-\frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$S_X^W(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f+\frac{\nu}{2})X^*(f-\frac{\nu}{2}) e^{j2\pi\nu t} d\nu$$

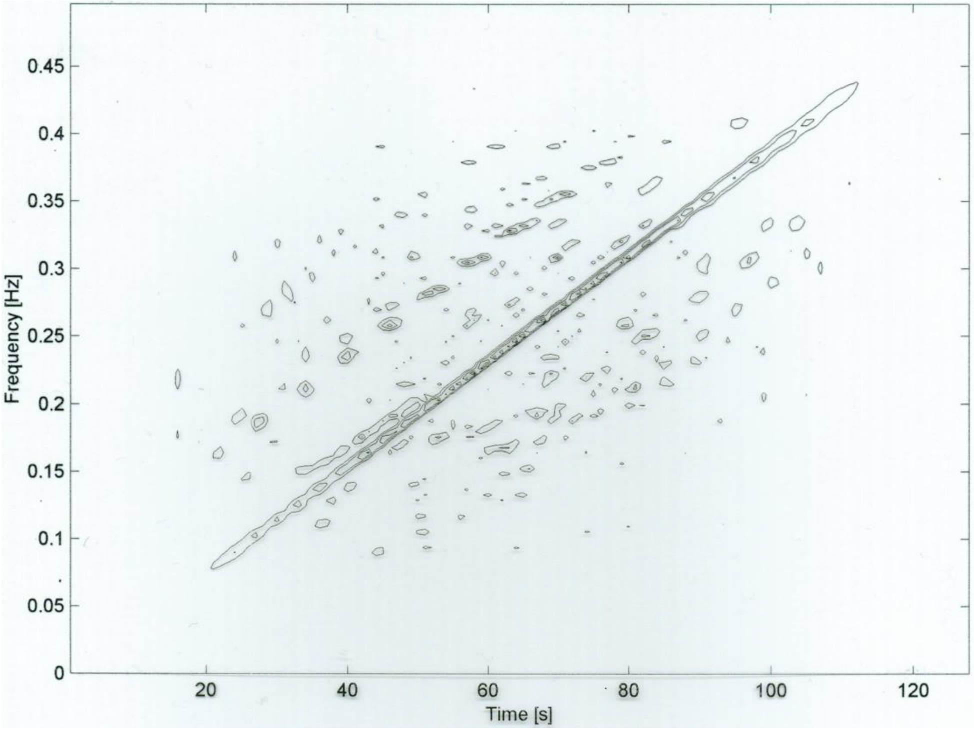

Czasowo-częstotliwościowe reprezentacje sygnałów
parametryczne
modele MA, AR, ARMA o zmiennych współczynnikach
nieparametryczne
liniowe
nieliniowe
spektrogramy
skalogramy
spektrogramy
skalogramy
- Gabor
- STFT
- max widmo
- max obwiednia
- transformata wavelet
biliniowe
klasa Cohena
- Wigner
- Wigner-Ville
- Page
- Levin
- Margenau-Hill
- Rihaczek
- Born-Jordan
- Choi-Williams
- Zhao-Atlas-Marks
- GED, TGD, MTED
- Butterworth
itd.
wąskopasmowa funkcja nieoznaczoności
wieloliniowe
klasa Boashasha-O'Shea'ego
afiniczny Wigner
- Bertrand-Bertrand
- Rioul-Flandrin
dystrybucja Q
- Eichmann-Marinovic
- Altes
szerokopasmowa funkcja nieoznaczoności
Inne metody:
1. Tukey - zespolona demodulacja [144]
2. Priestley - widmo ewolucyjne [144]
3. Tjostheim - widmo ewolucyjne [144]
4. Cohen-Posch - reprezentacje dodatnie [52]

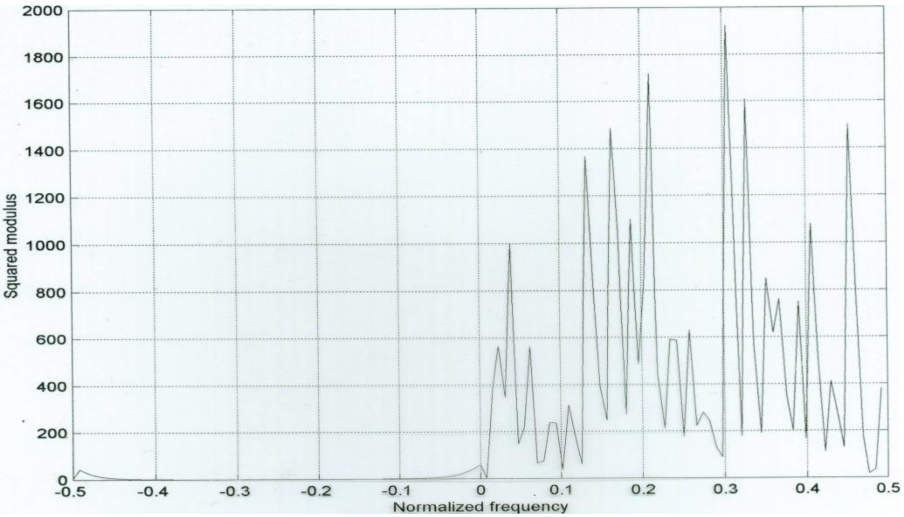
Efekty analiz czas-częstotliwość

- Zaszumiony sygnał z liniową modulacją częstotliwości



Transformata Wignera-Ville'a (prezentacja konturowa)





Syntetyczne podsumowanie – dekompozycja falkowa

Baza powstaje z falki matki:

$$\psi^{s,x}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{t-x}{s}\right), \quad s \neq 0$$

$$\int \psi(t)dt = 0 \qquad \|\psi\| = 1 \qquad \|\psi^{s,x}\| = 1$$

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}\int \frac{1}{\sqrt{|s|}} W_f(s,x)\psi\left(\frac{t-x}{s}\right) ds dx \quad \xrightarrow{\text{dyskretyzacja}} \quad f = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} c_{m,n}(f)\psi_{m,n}(t)$$

Postać transformaty falkowej przy dyskretyzacji dziedziny przesunięcia *x* i skali *s*:

$s = s_0^m,\ x = n x_0 s_0^m$, gdzie $m,n \in \mathbf{Z}$, dla funkcji (sygnału) *f,* co daje

$$\psi_{m,n}(t) = s_0^{-m/2}\psi(s_0^{-m}t - nx_0)$$

kładąc $s_0 = 2, x_0 = 1$ tworzymy rozwinięcia w bazach ortonormalnych.

.

Podsumowanie – aproksymacja wieloskalowa sygnałów

$\phi(t)$ - funkcja skalująca, analogicznie mamy $\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\phi(2^{-m}t - n)$

Dekompozycja *f*:

$$f(t) = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} < f, \psi_{m,n} > \psi_{m,n}(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} < m, \phi_{m,n} > \phi_{m,n}(t) + \sum_{k\le m, n\in\mathbf{Z}} < f, \psi_{k,n} > \psi_{k,n}(t)$$

Sposób obliczania współczynników transformaty jest następujący:

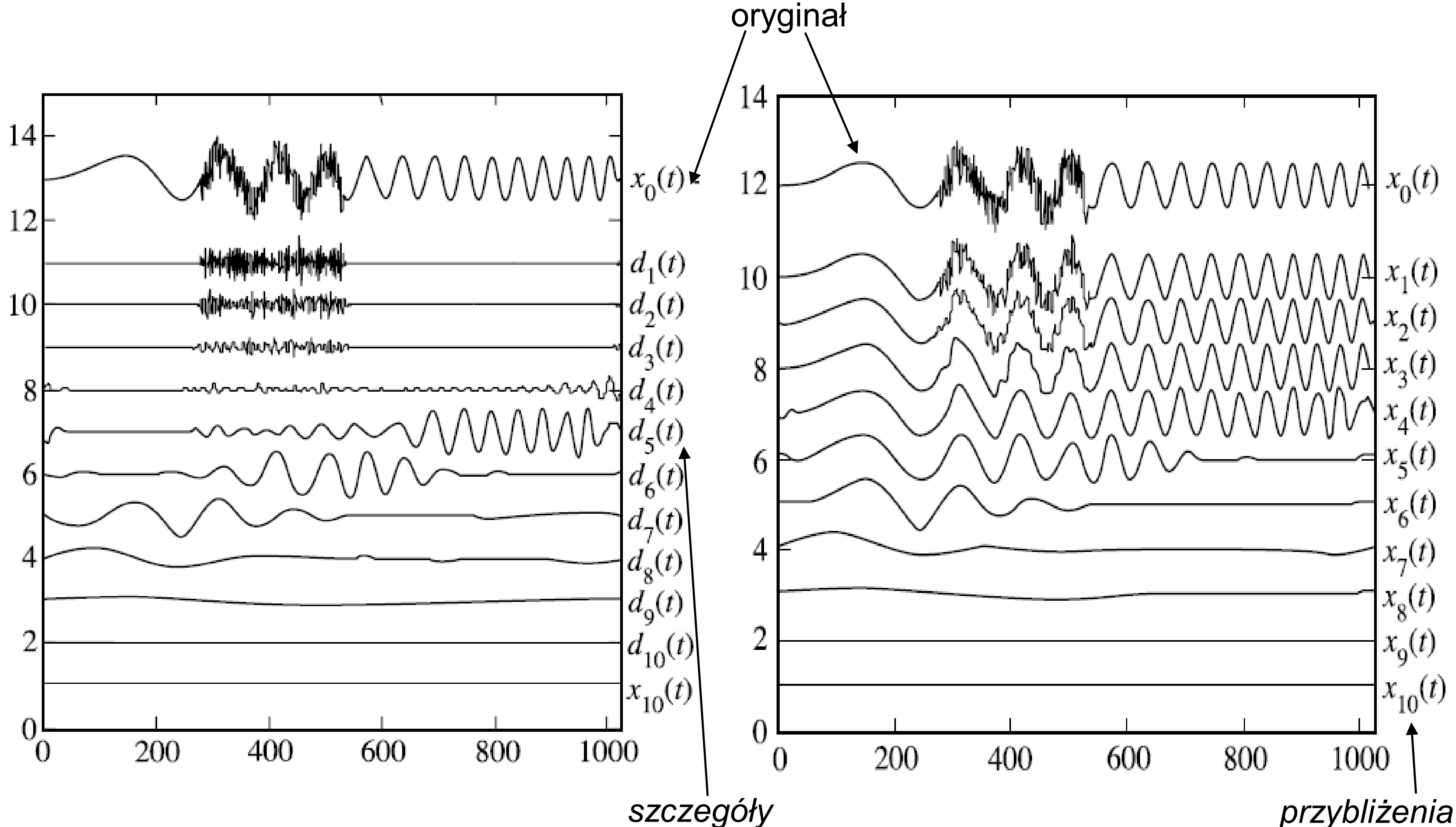
$$a_{m,n}(f) = \sum_k h_{k-2n} a_{m-1,k}(f) \qquad c_{m,n}(f) = \sum_k g_{k-2n} a_{m-1,k}(f)$$

współczynniki skalujące *współczynniki falkowe*

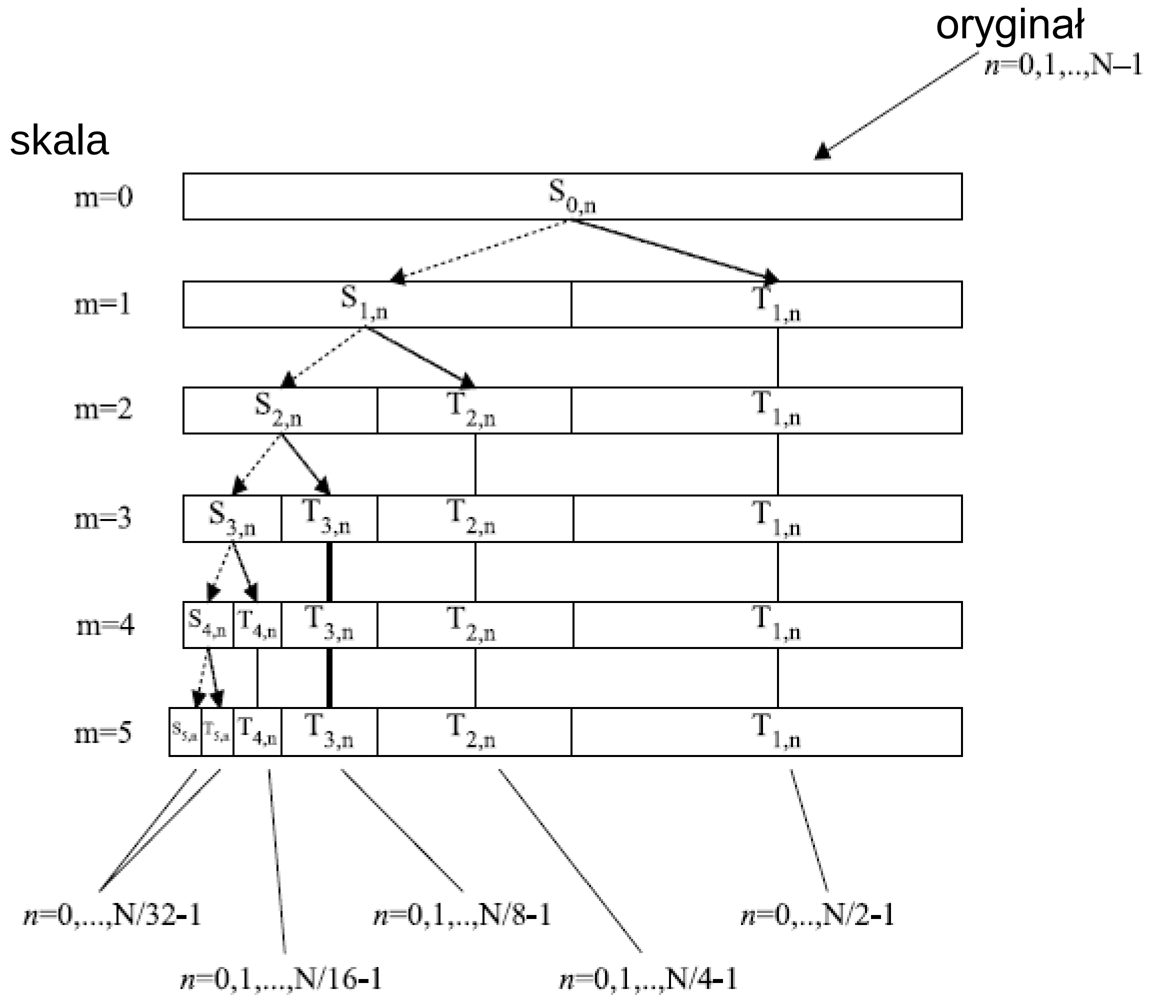
Rekonstrukcja:

$$a_{m-1,n}(f) = \sum_k [h_{n-2k} a_{m,k}(f) + g_{n-2k} c_{m,k}(f)]$$

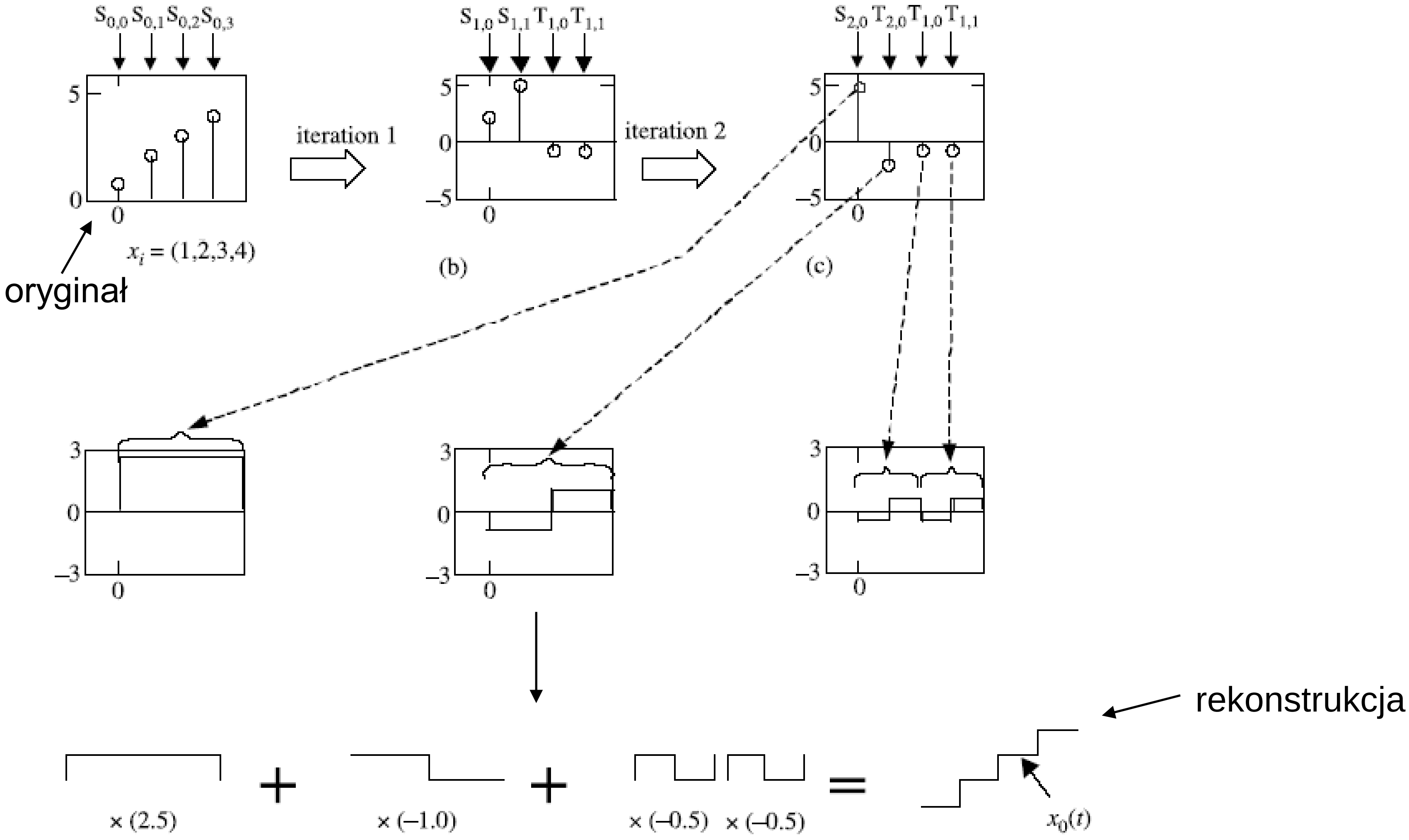
Dekompozycja (analiza) sygnału



Rozkład pasm w dekompozycji

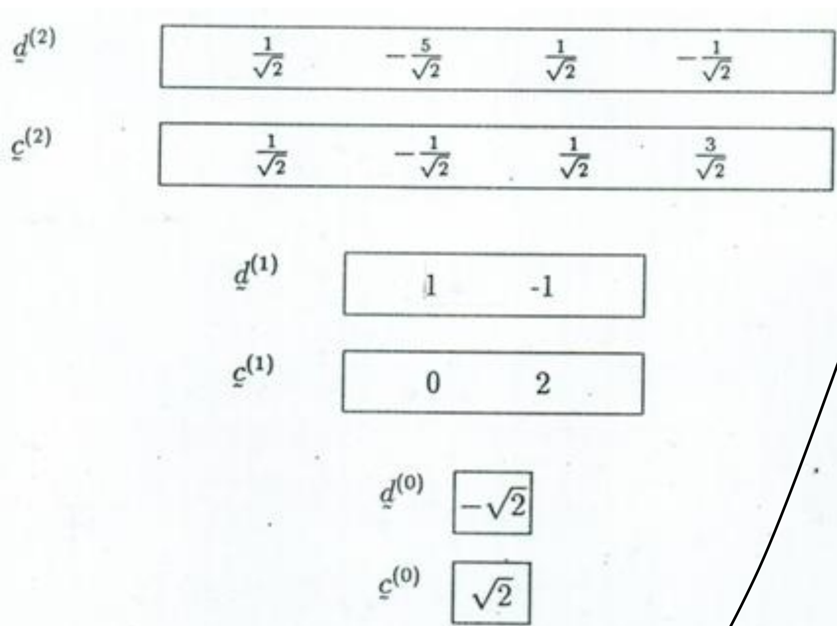


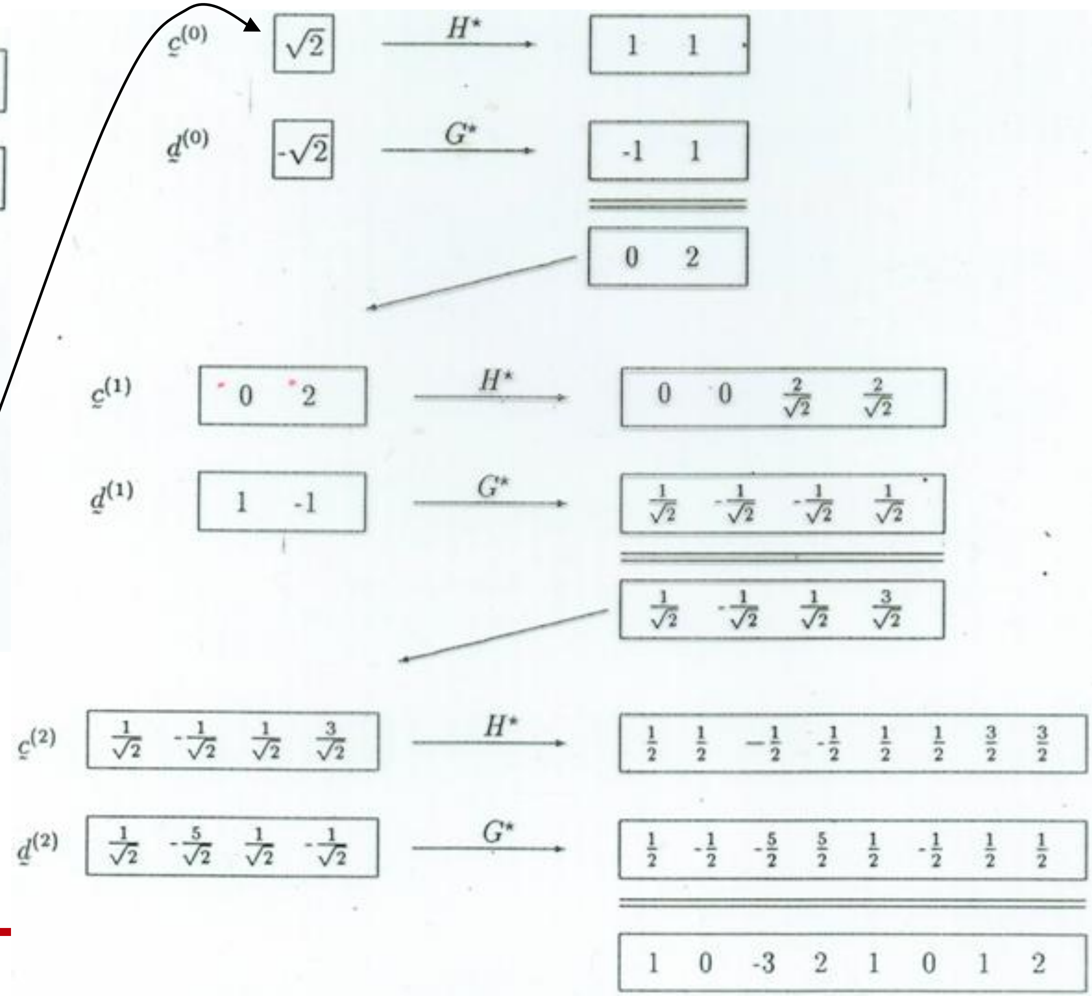
Analiza i synteza sygnału (falki Haara)



Falkowe liczenie

- Wektor danych wejściowych: [1,0,-3,2,1,0,1,2]
- Filtry Haara: $h_{Haar} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ $g_{Haar} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$



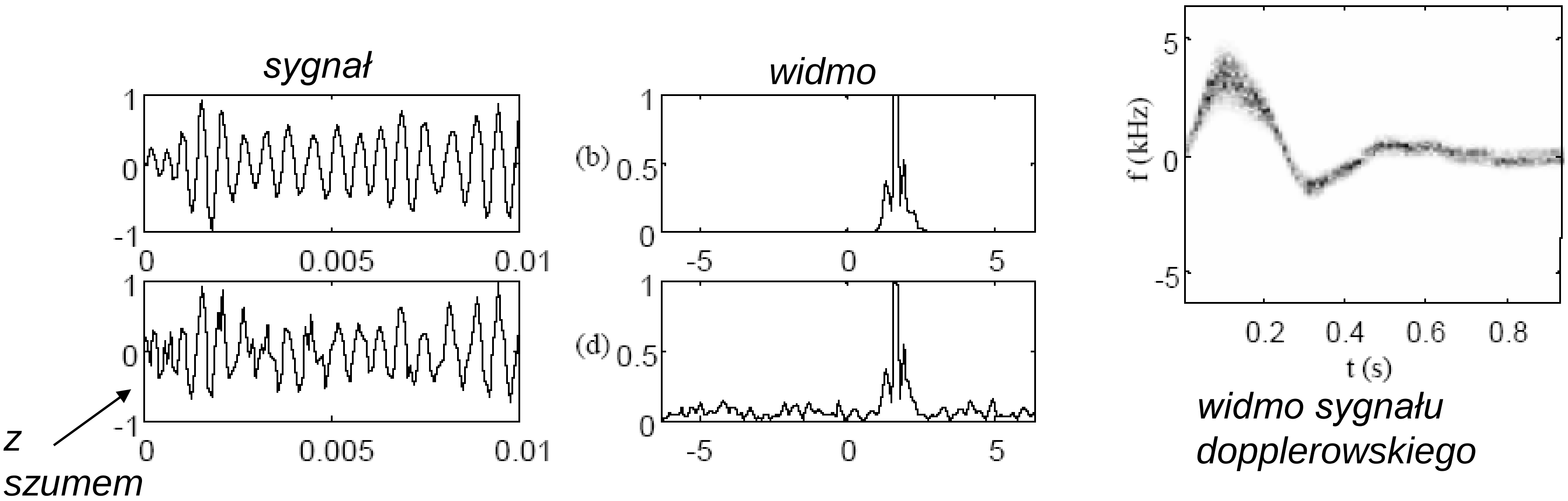


- Wektor współczynników:

$$\left[\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, -1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

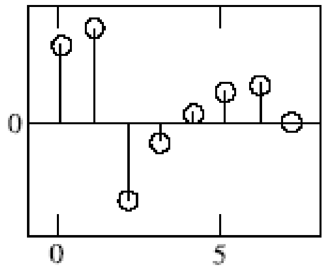
PROSTE ZASTOSOWANIA

Przykład docierania do sygnału (dopplerowskiego)

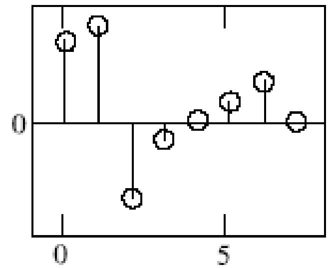


- odszumianie: wydobywanie sygnału zagnieżdżonego w szumie informacyjnym, czyli estymacja sygnału użytecznego
- ważne są lokalne zmiany, szczegóły
- metoda: masymalne rozdzielenie sygnału i szumu (zwykle w nowej dziedzinie) + selekcja (najprościej progowanie)

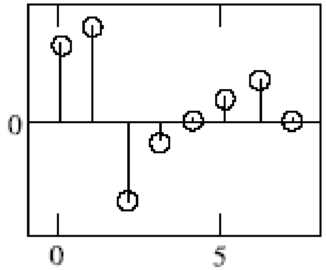
Rekonstrukcja z progowaniem



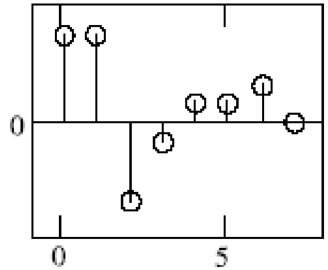
(2,475,0,354,7,000,–0,500,–0,070,–2,121,–0,707,1,414)



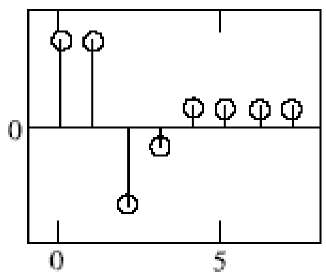
(b) (2,475,**0**,7,000,–0,500,–0,707,–2,121,–0,707,1,414)



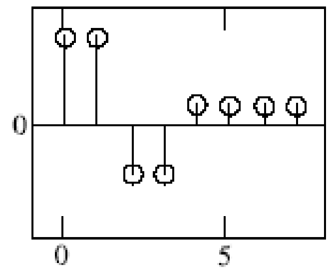
(2,475,**0**,7,000,**0**,–0,707,–2,121,–0,707,1,414)



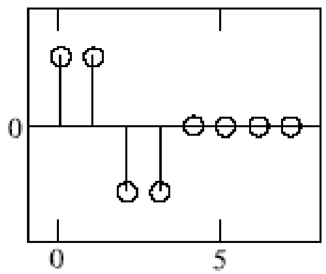
(d) (2,475,**0**,7,000,**0**,**0**,–2,121,**0**,1,414)



(2,475,**0**,7,000,**0**,**0**,–2,121,**0**,**0**)



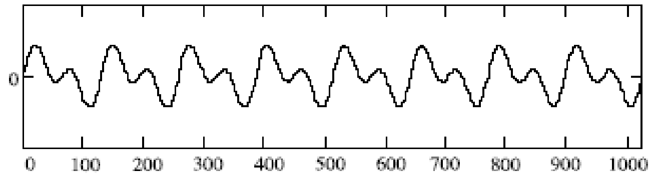
(f) (2,475,**0**,7,000,**0**,**0**,**0**,**0**,**0**)



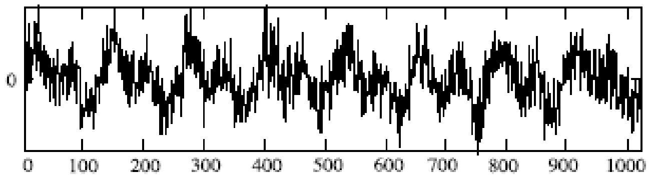
(**0**,**0**,7,000,**0**,**0**,**0**,**0**,**0**)

odtwarzanie sygnału na podstawie zerowanych współczynników falkowych i skalujących

Odszumianie sygnału

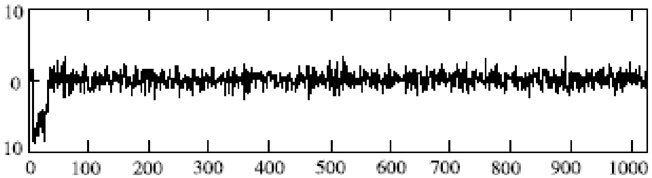


sygnał

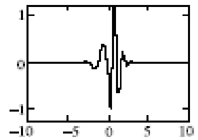


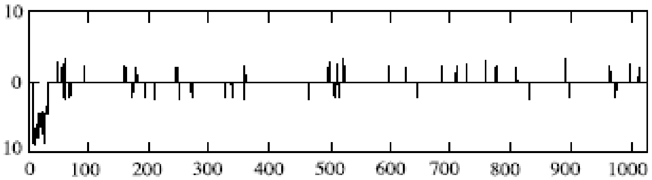
sygnał z szumem

Różne metody progowania

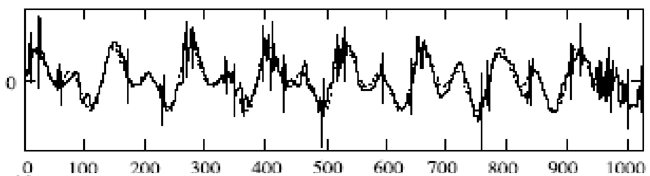


współczynniki bazy

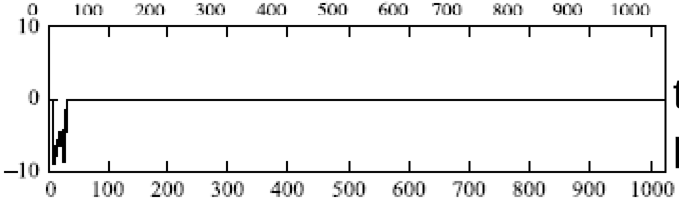




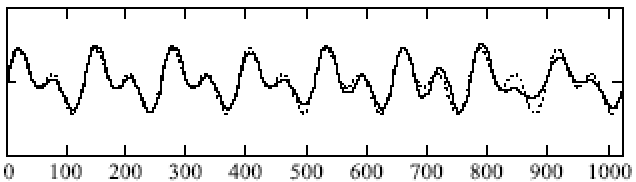
twarde prog. (2)



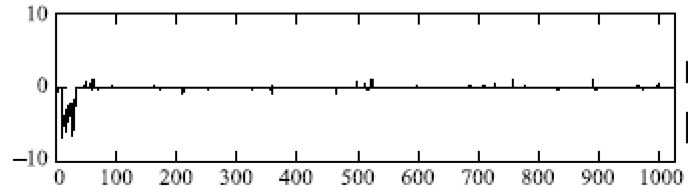
rekonstrukcja



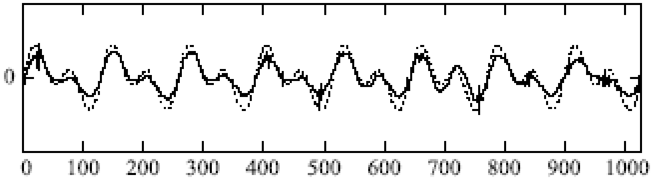
twarde prog. (4)

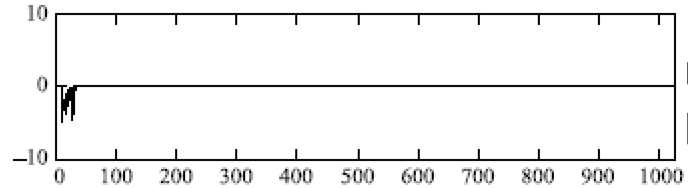


rekonstrukcja

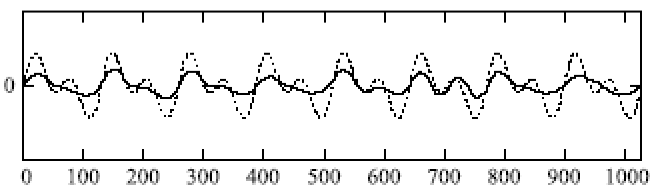


miękkie prog. (2)

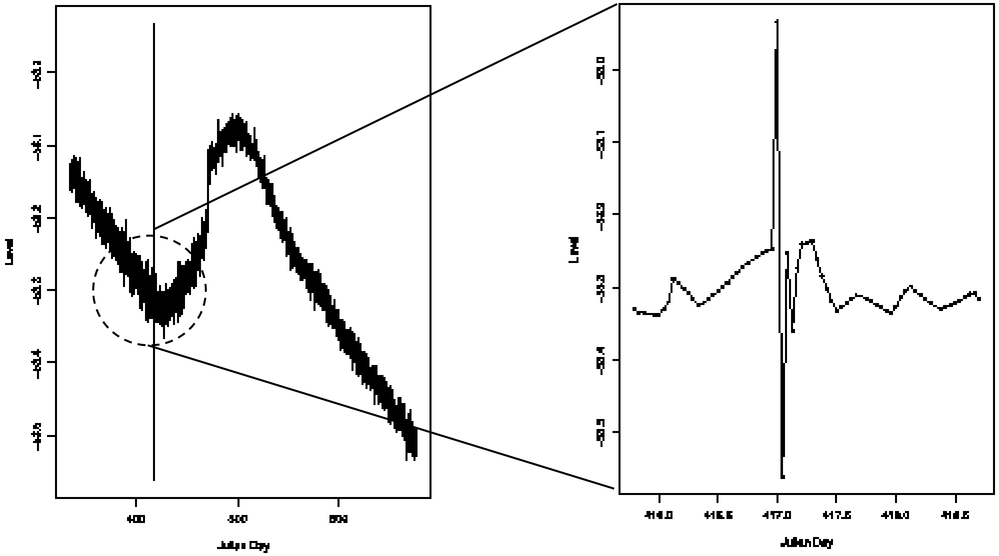




miękkie prog. (4)

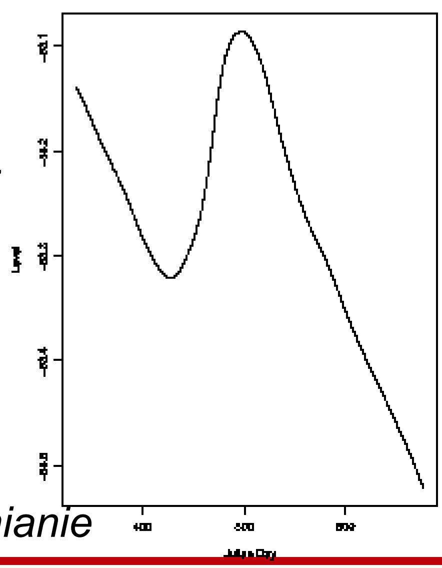


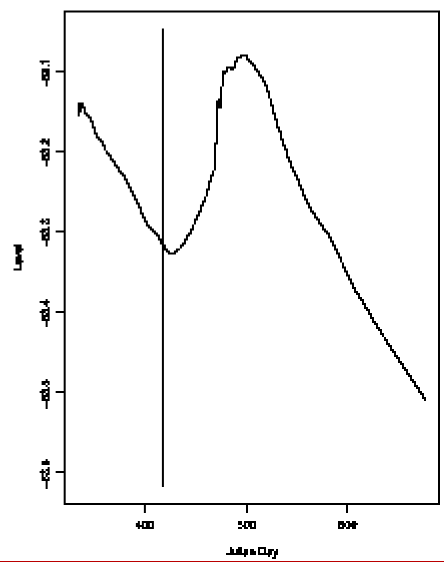
Gubienie szczegółów



sygnał

odszumiony sygnał

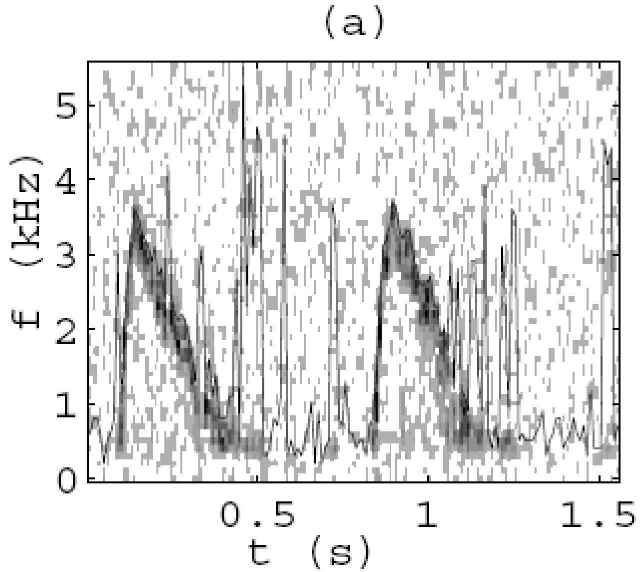


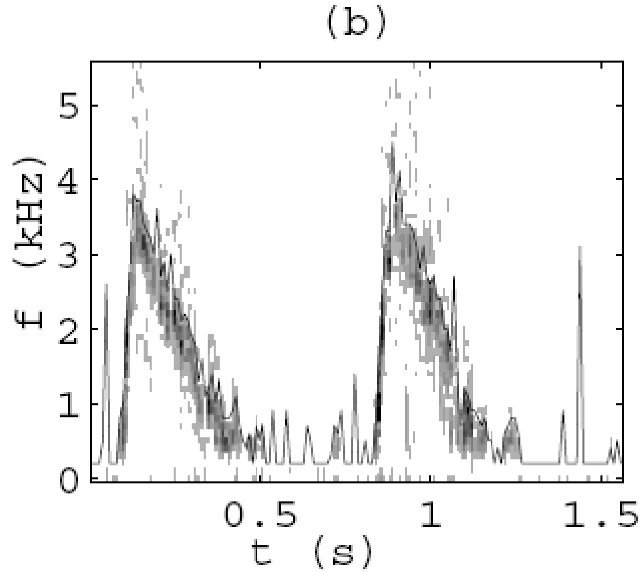


proste uśrednianie

odsz. falkowe

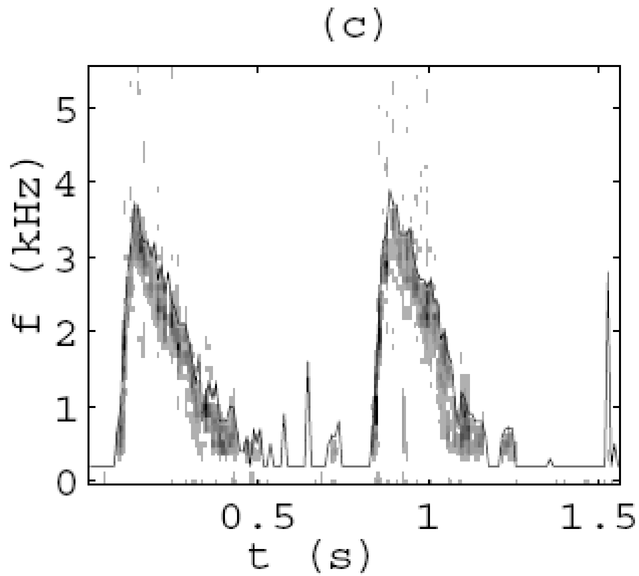
Odszumianie dopplera





spektrogram sygnału oryginalnego

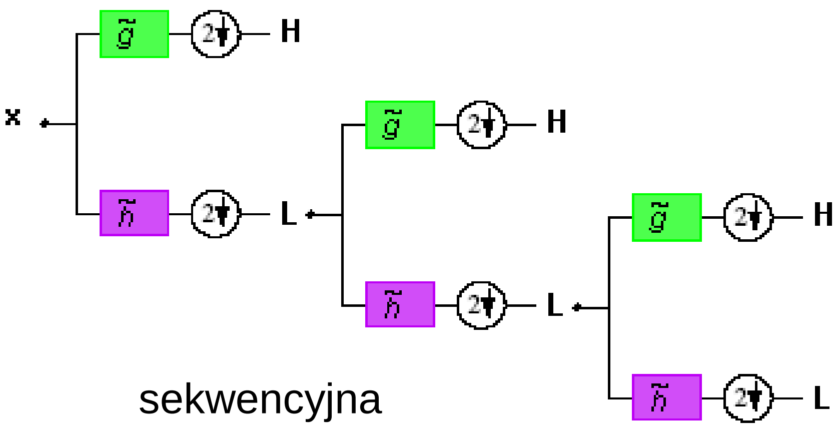
po odszumieniu (falka rzędu 8)



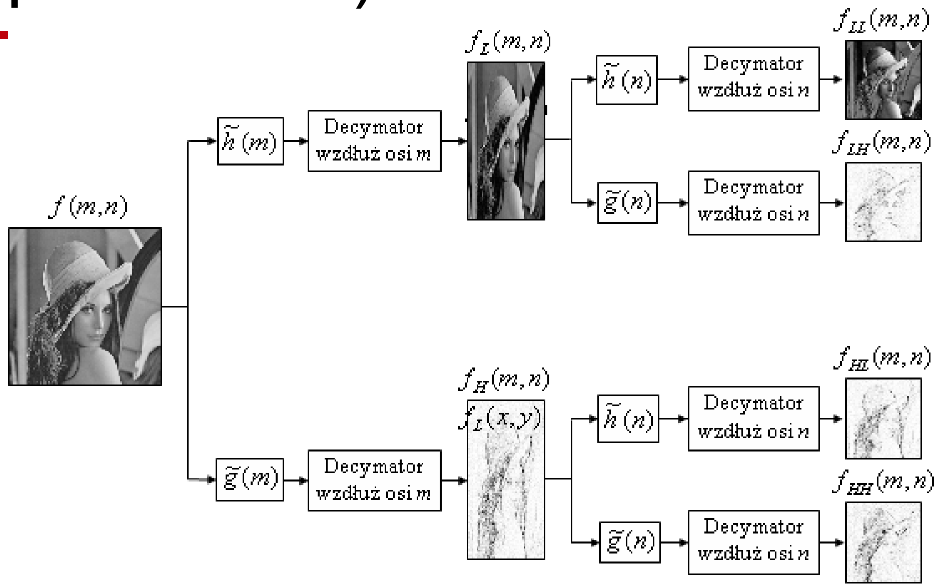
po odszumieniu (falka rzędu 4)

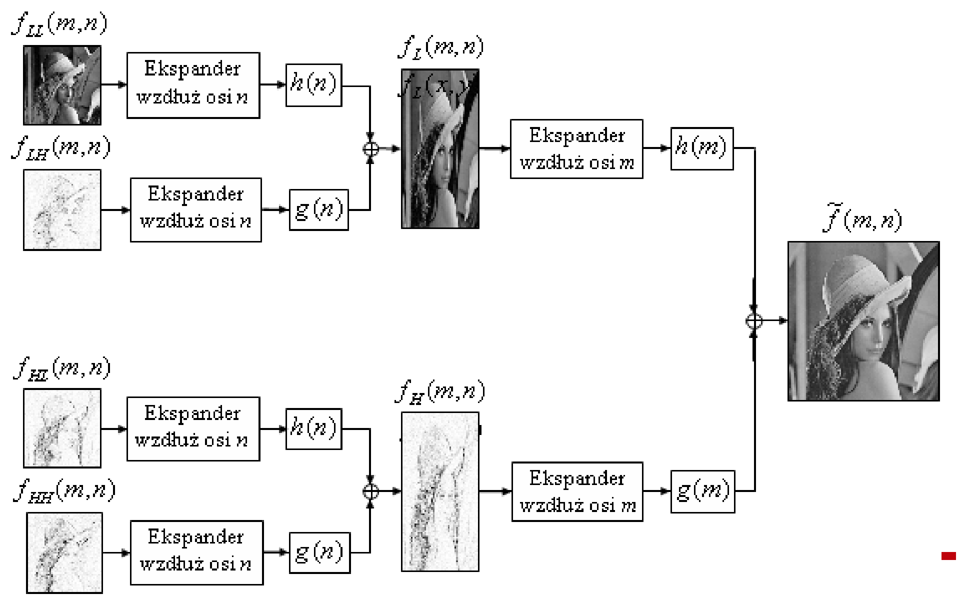
FALKOWA DEKOMPOZYCJA OBRAZÓW

Falkowa dekompozycja obrazów
(jądro separowalne)

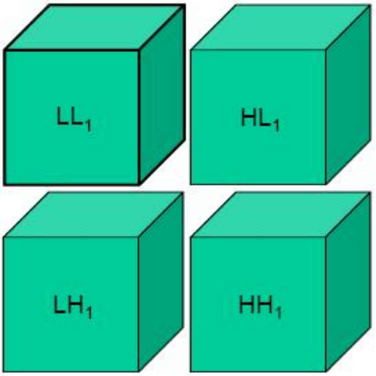


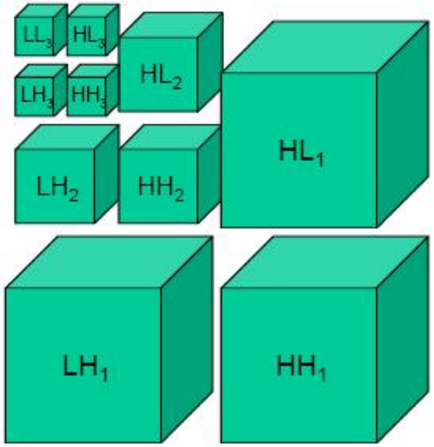
sekwencyjna
filtracja z
podpróbkowaniem

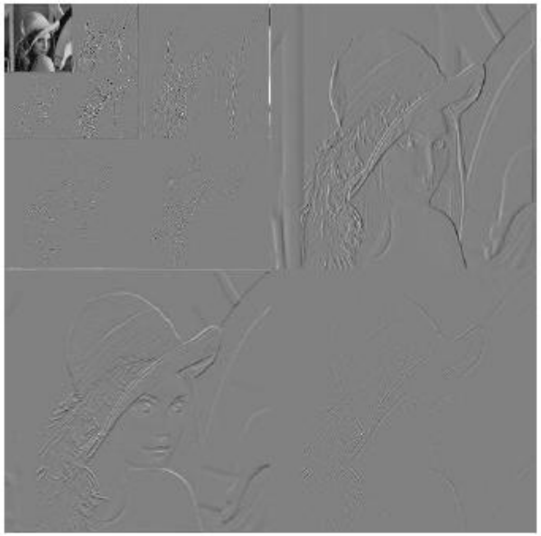




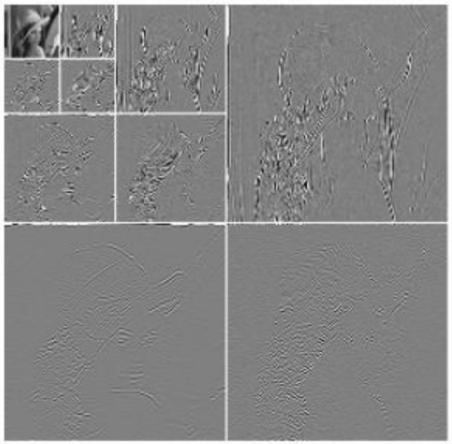
Dekompozycja falkowa
(schemat diadyczny, z separowanym jądrem)

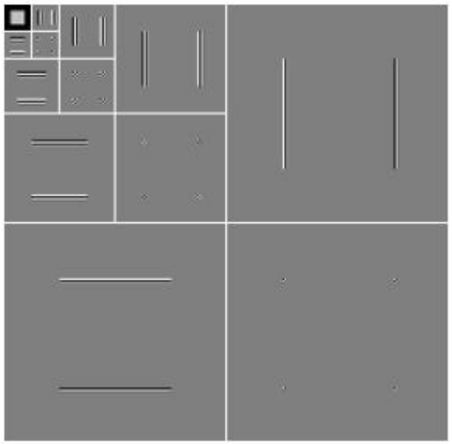


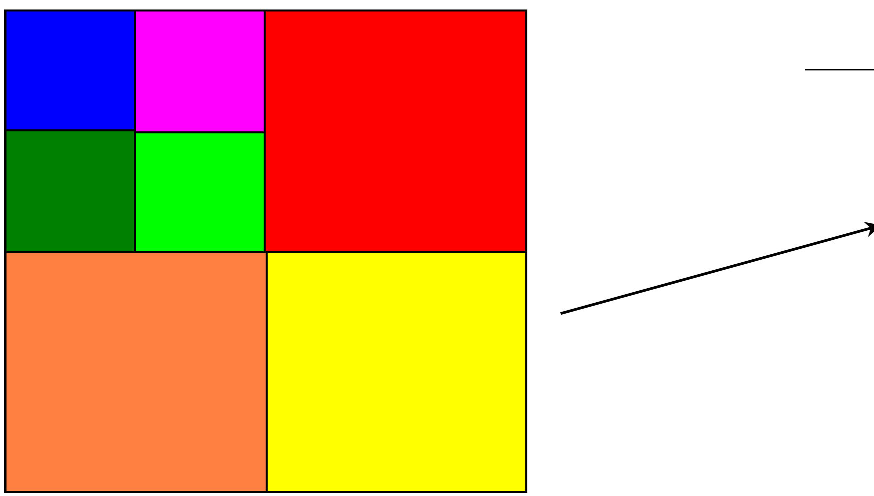


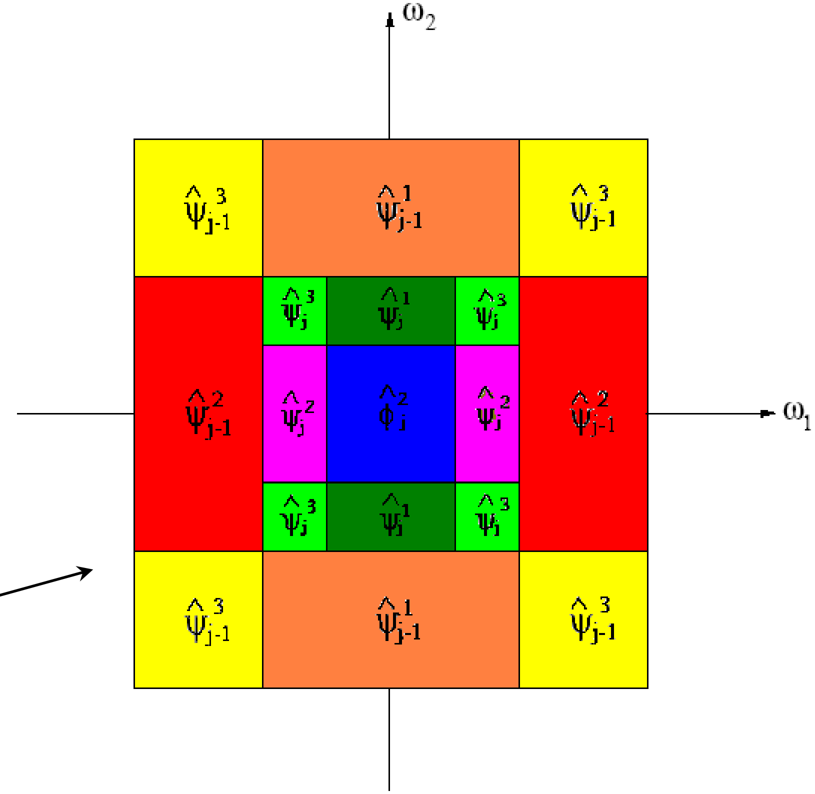


Falkowa dekompozycja obrazów

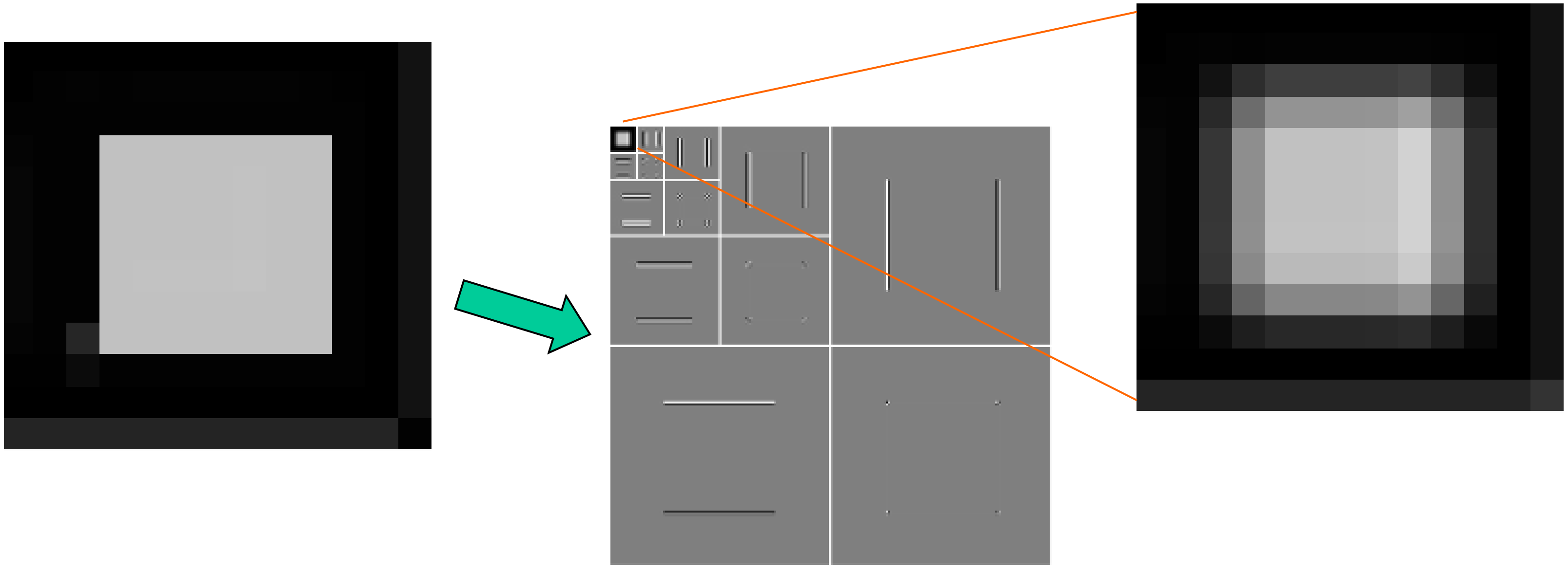




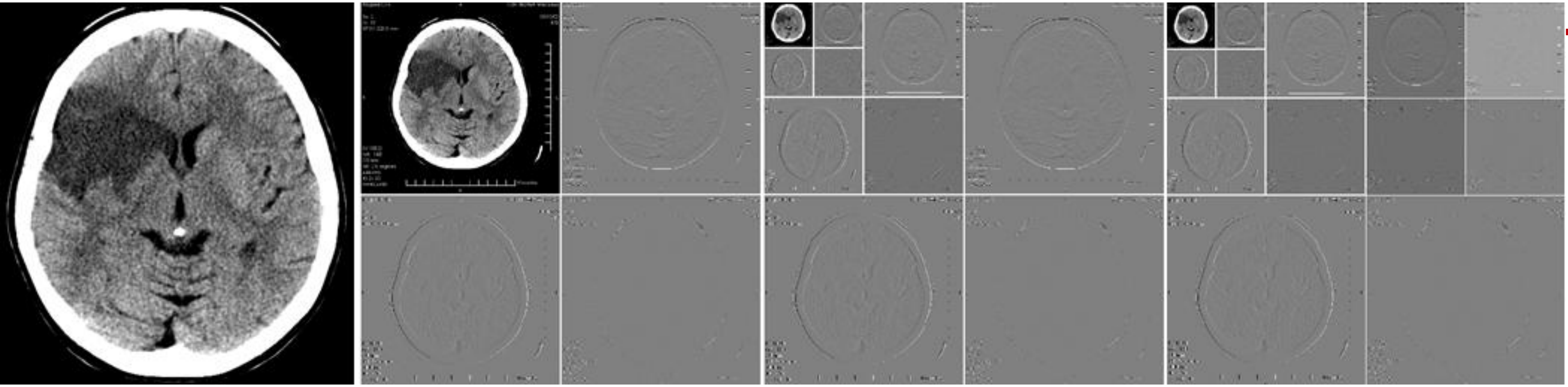


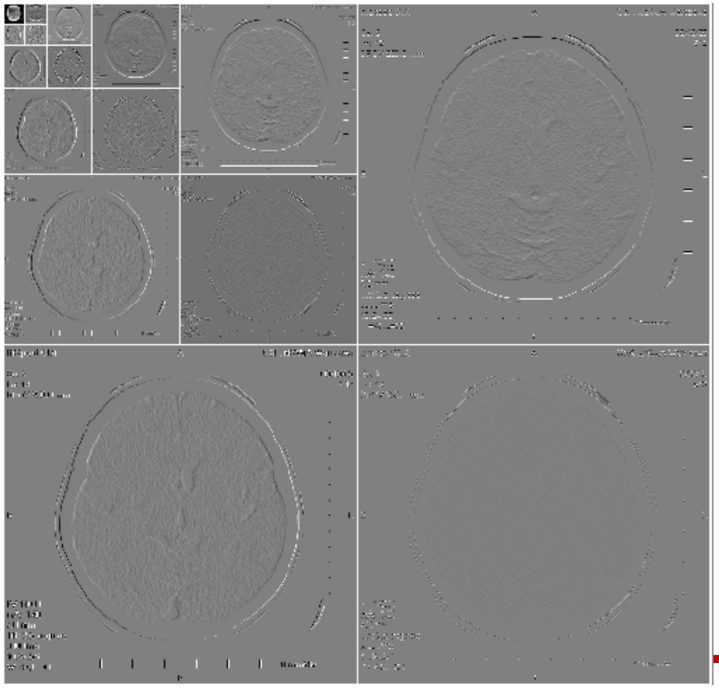


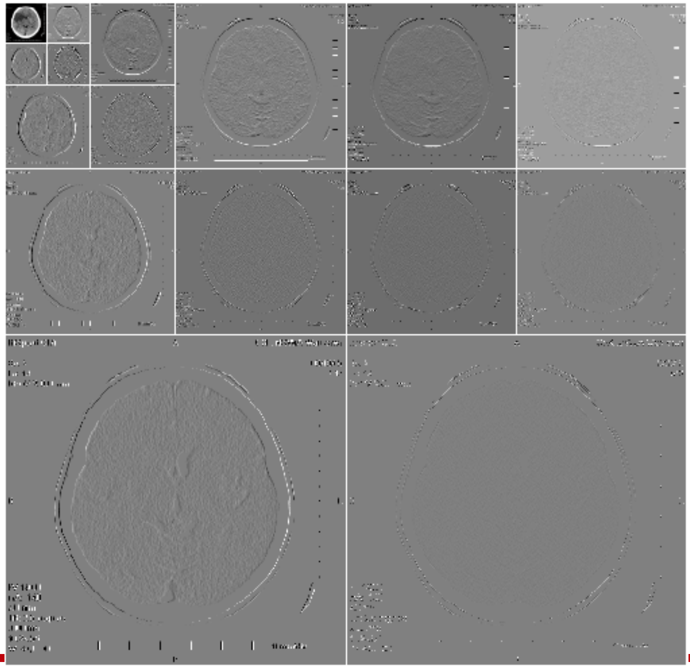
Korzyść ze stosowania transformacji falkowej



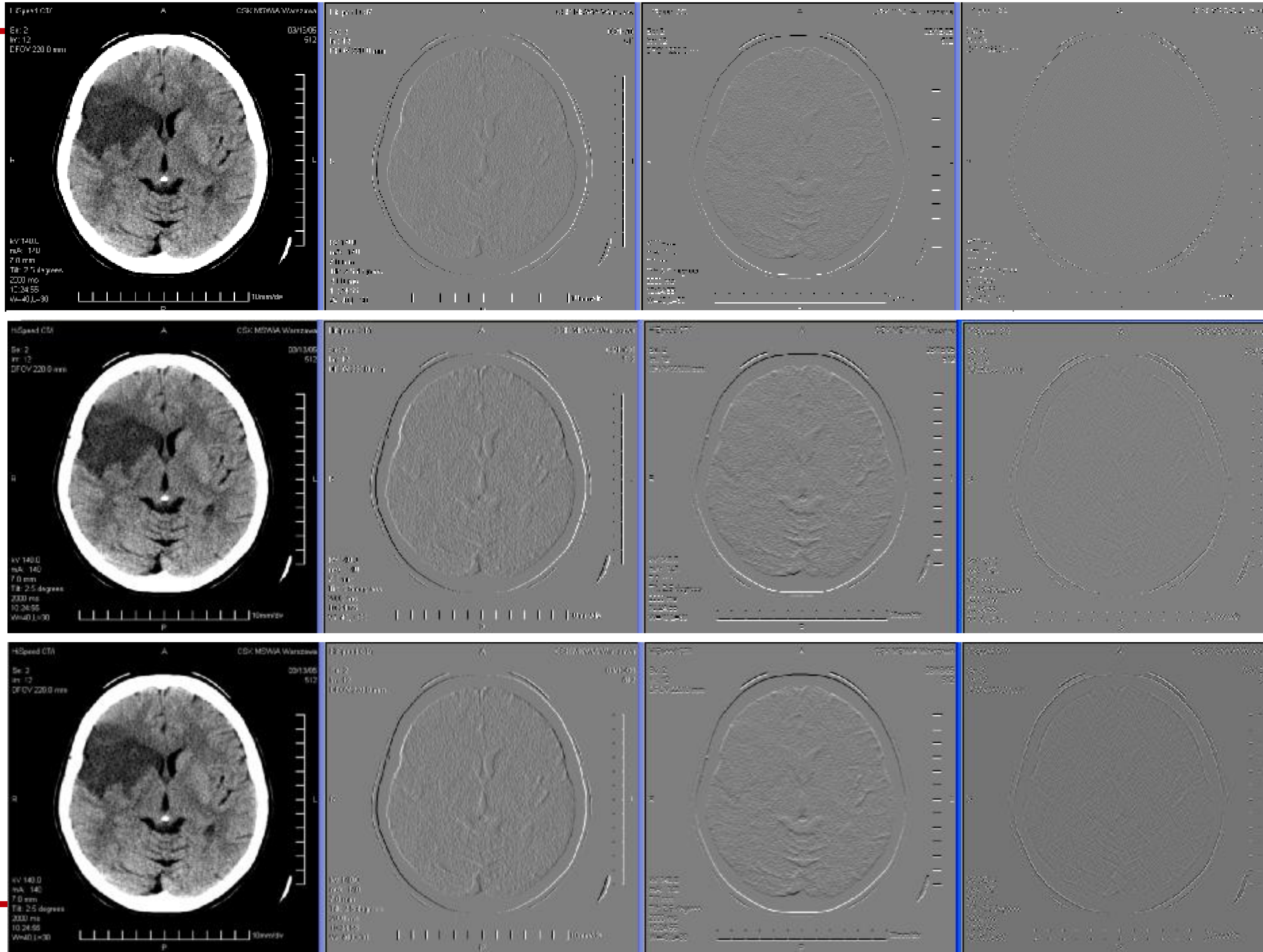
Pakiety falek



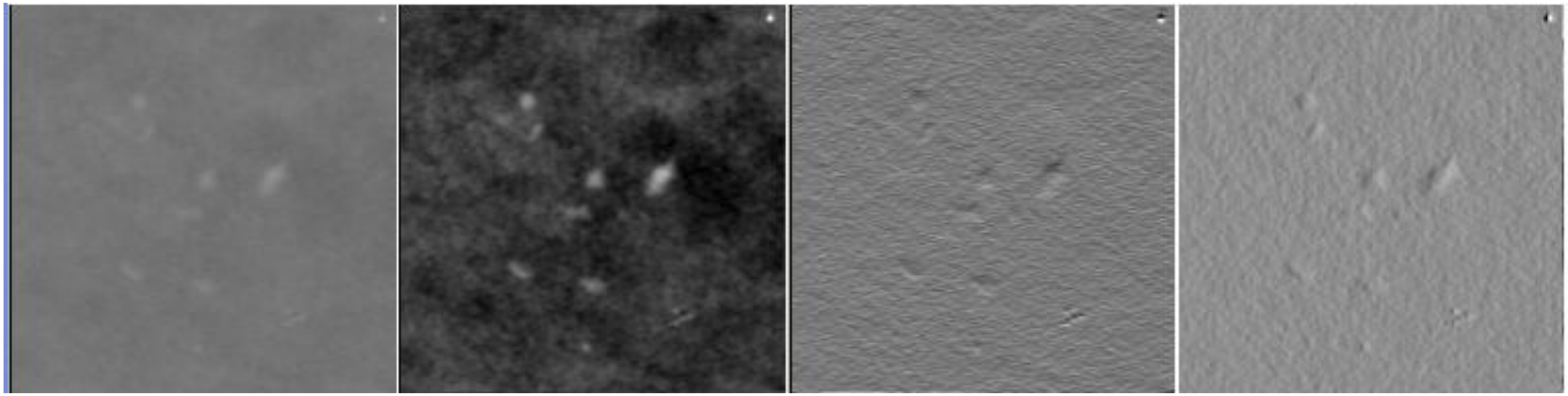




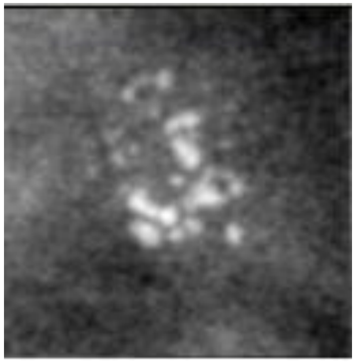
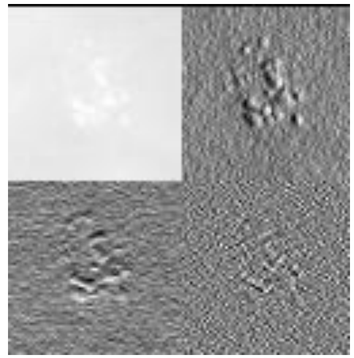
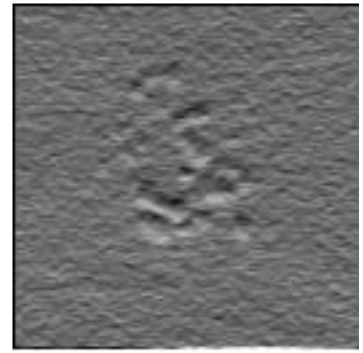
Falki bez decymacji

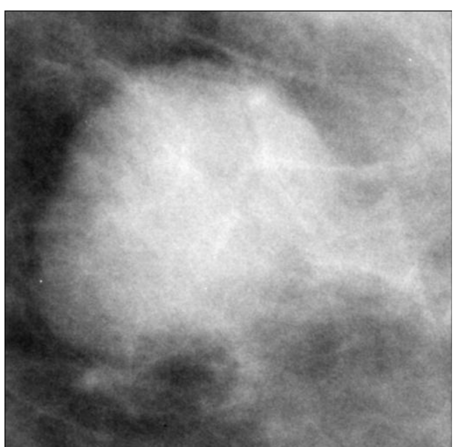
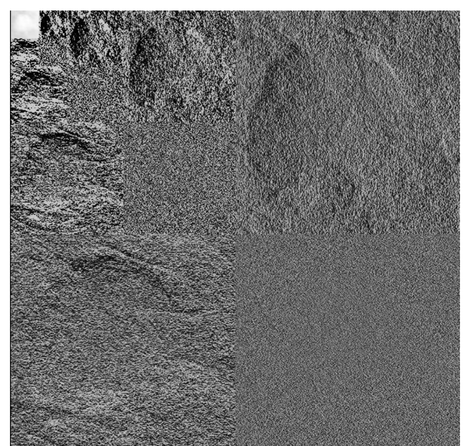
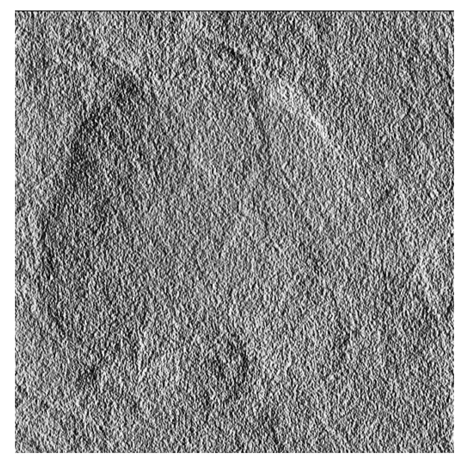


Falkowe mikrozwapnienia bez decymacji

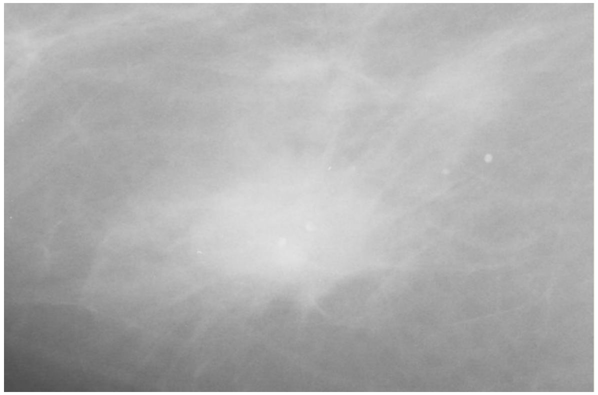
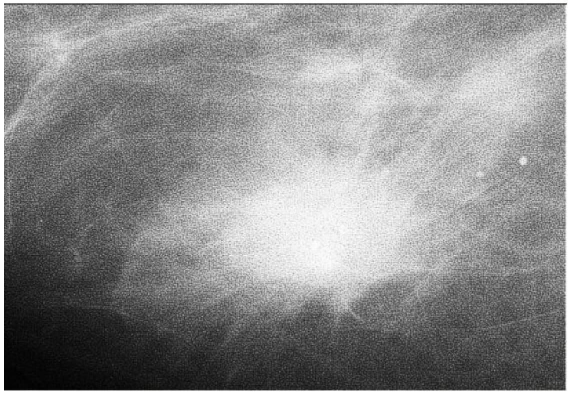
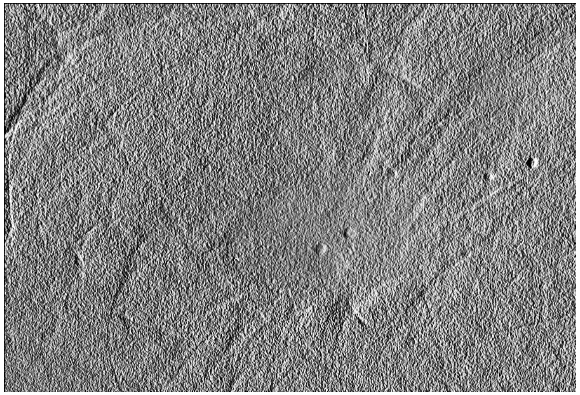


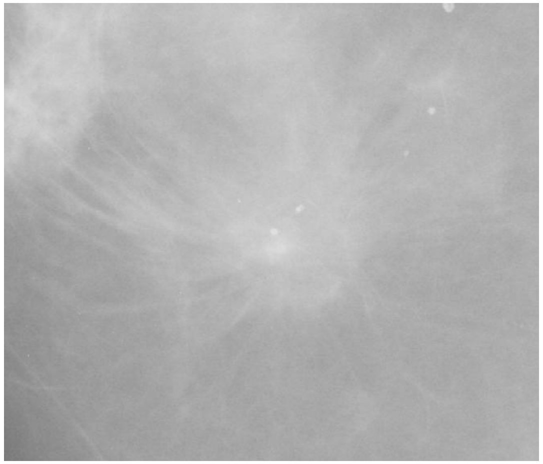
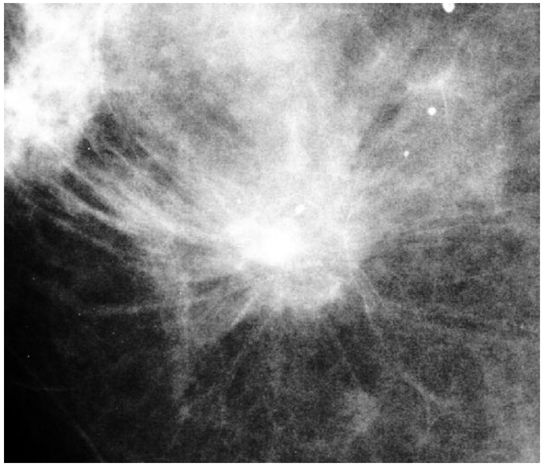
Modele

Modele2

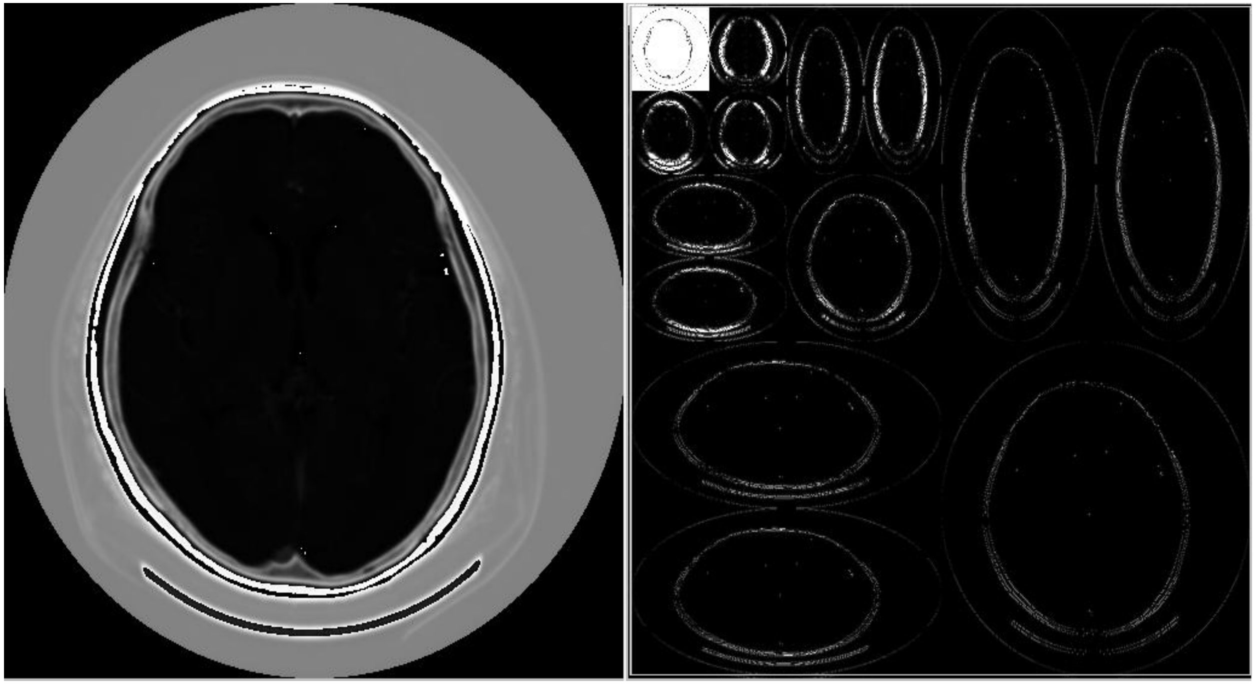




Rodzina falek w reprezentacji obrazów – doskonalenie reprezentacji

- Falki tensorowe
  - Złożenie przekształceń 1W po wierszach i kolumnach
  - Pakiety falek
  - Bazy nadmiarowe
- Falki geometryczne
  - Wedgelety, czyli kliniki
  - Beamlety, czyli beleczki
- Falki kierunkowe
  - Ridgelety, czyli grzbieciki
  - Curvelety, czyli krzywki
  - Contourlety , czyli konturki

FALKI DOBRZE OPISUJĄ KRAWĘDZIE ???



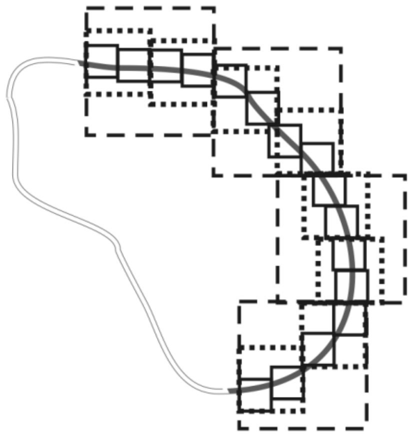
$f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$

Przy transformacji 2W z separowalnym jądrem (1W1W) dobrze reprezentowane są jedynie punkty osobliwe, a nie linie czy krzywe (czyli kontury)

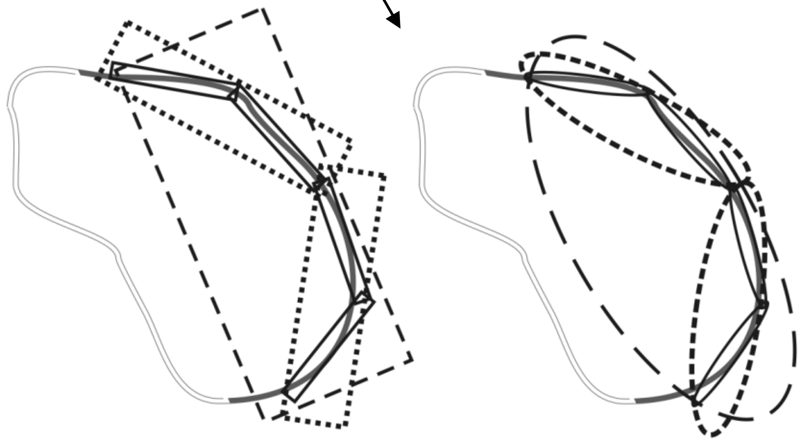
OGRANICZENIA FALEK 1W1W

Nie można określić gładkości krawędzi

Lepsze wpasowanie w krawędź, charakterystyka gładkości



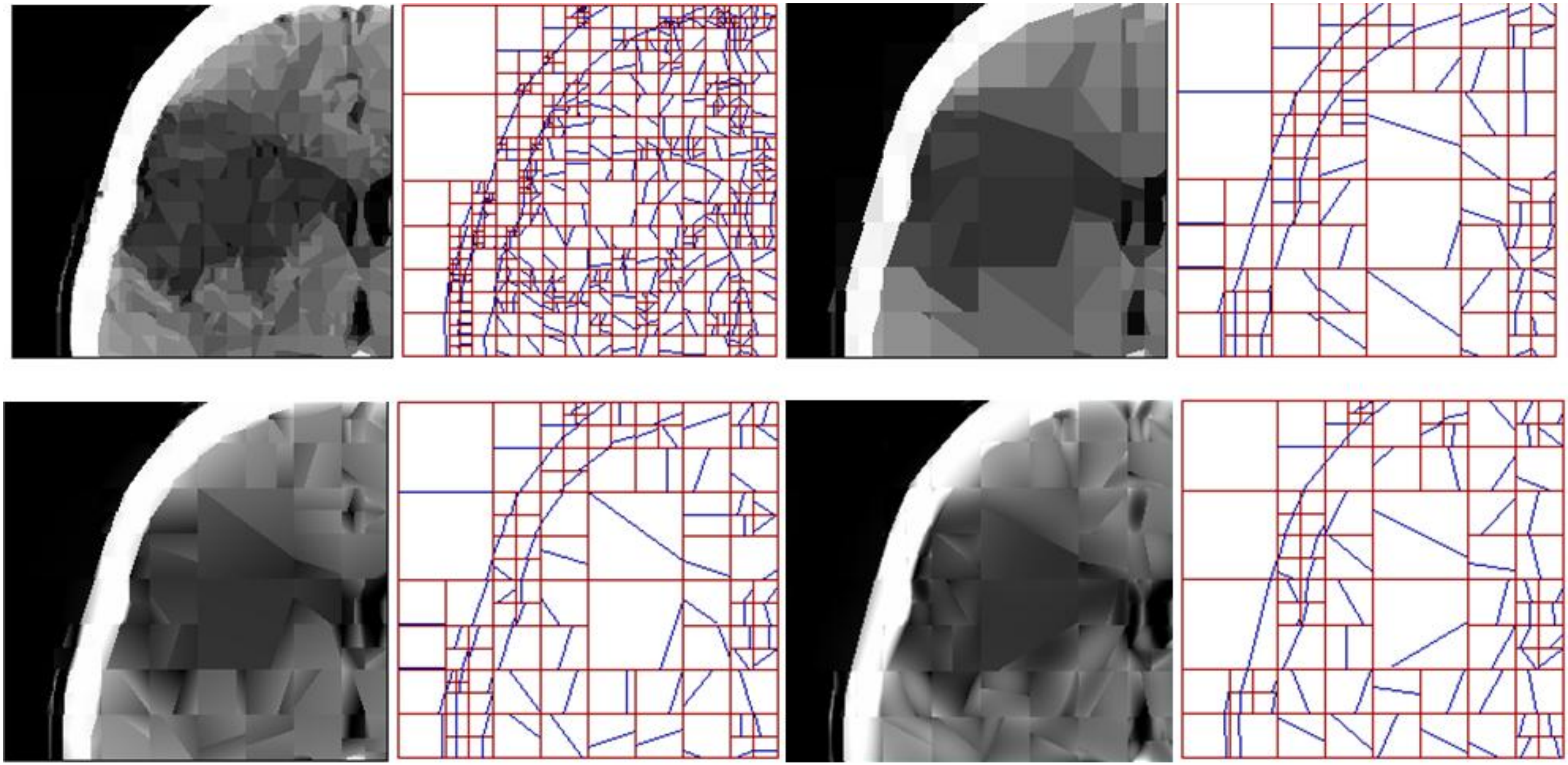
falki 1W1W
(tensorowe)



falki 2W
(contourlety, curvelety)

Oprócz położenia i skali dochodzi argument: orientacja

Aproksymacja wedgeletowa

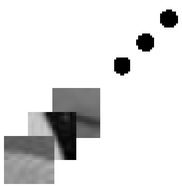


PROSTA OBSERWACJA

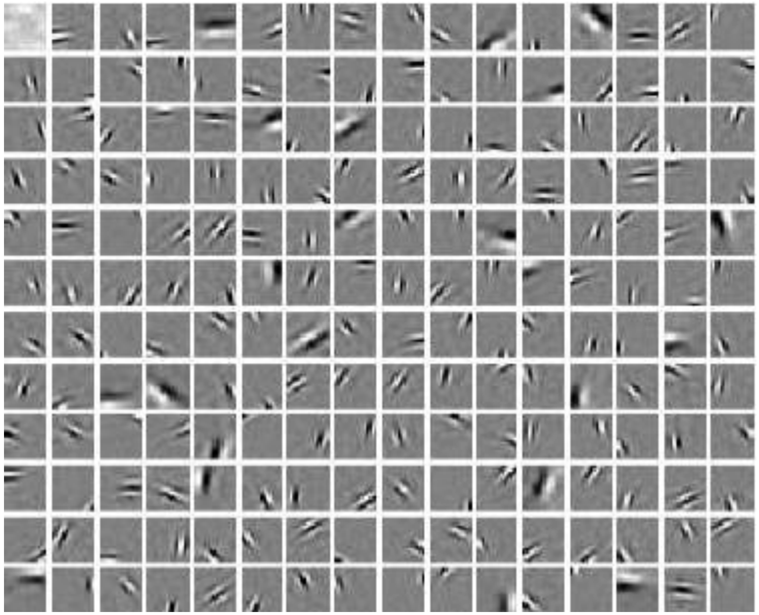
Ludzki system widzenia (HVS): bardzo efektywny, szybki, a receptory dostarczają informacji o położeniu, skali i orientacji

Upakowane (sparse) składniki obrazów naturalnych (Olshausen, Field, 1996)

imagelets

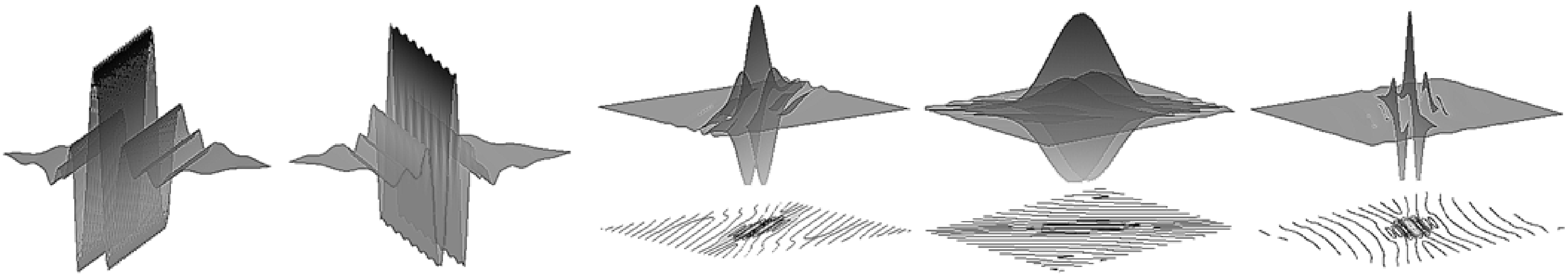


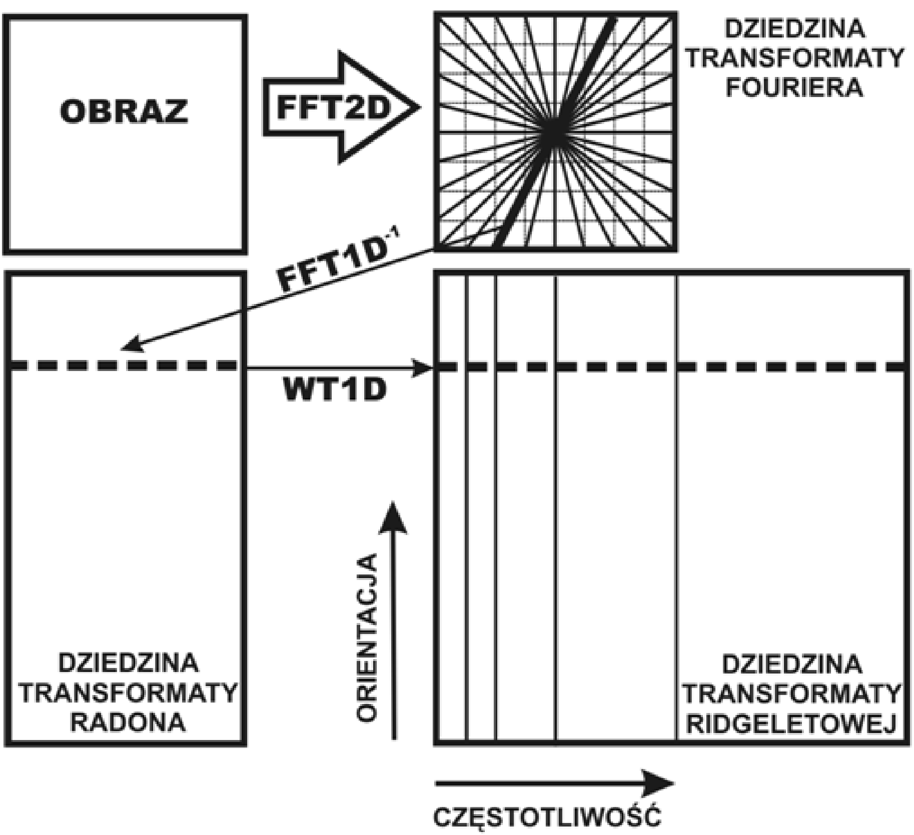
poszukiwanie upakowanej reprezentacji

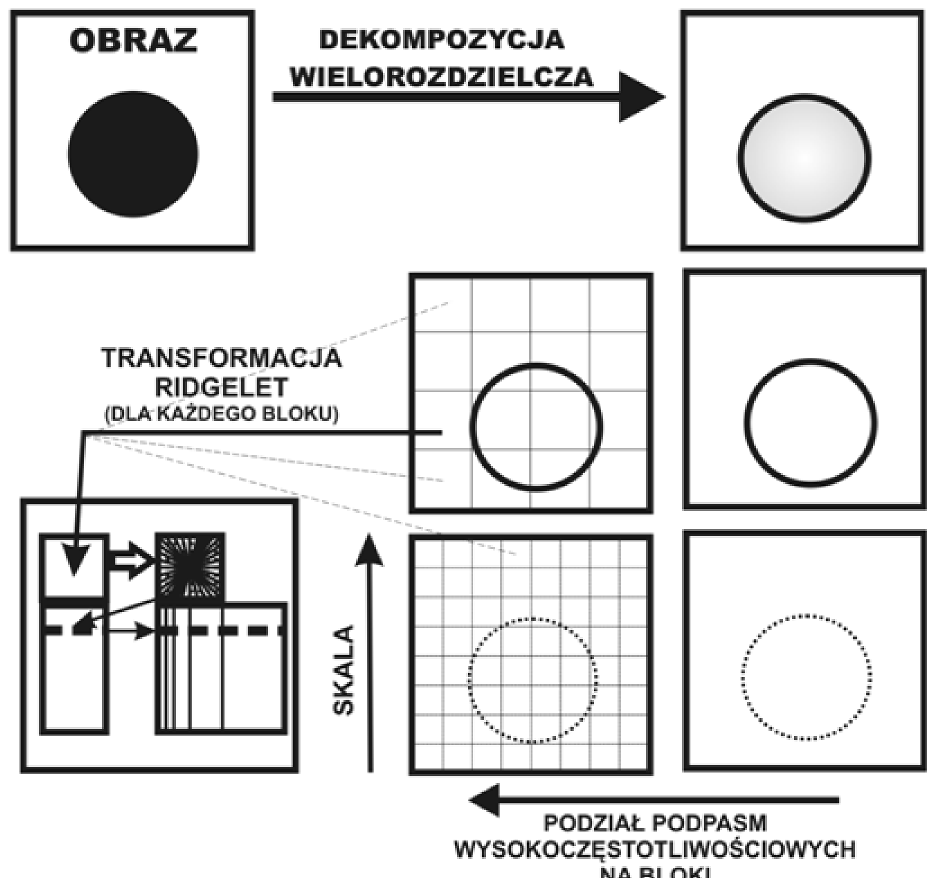


bloki danych źródłowych

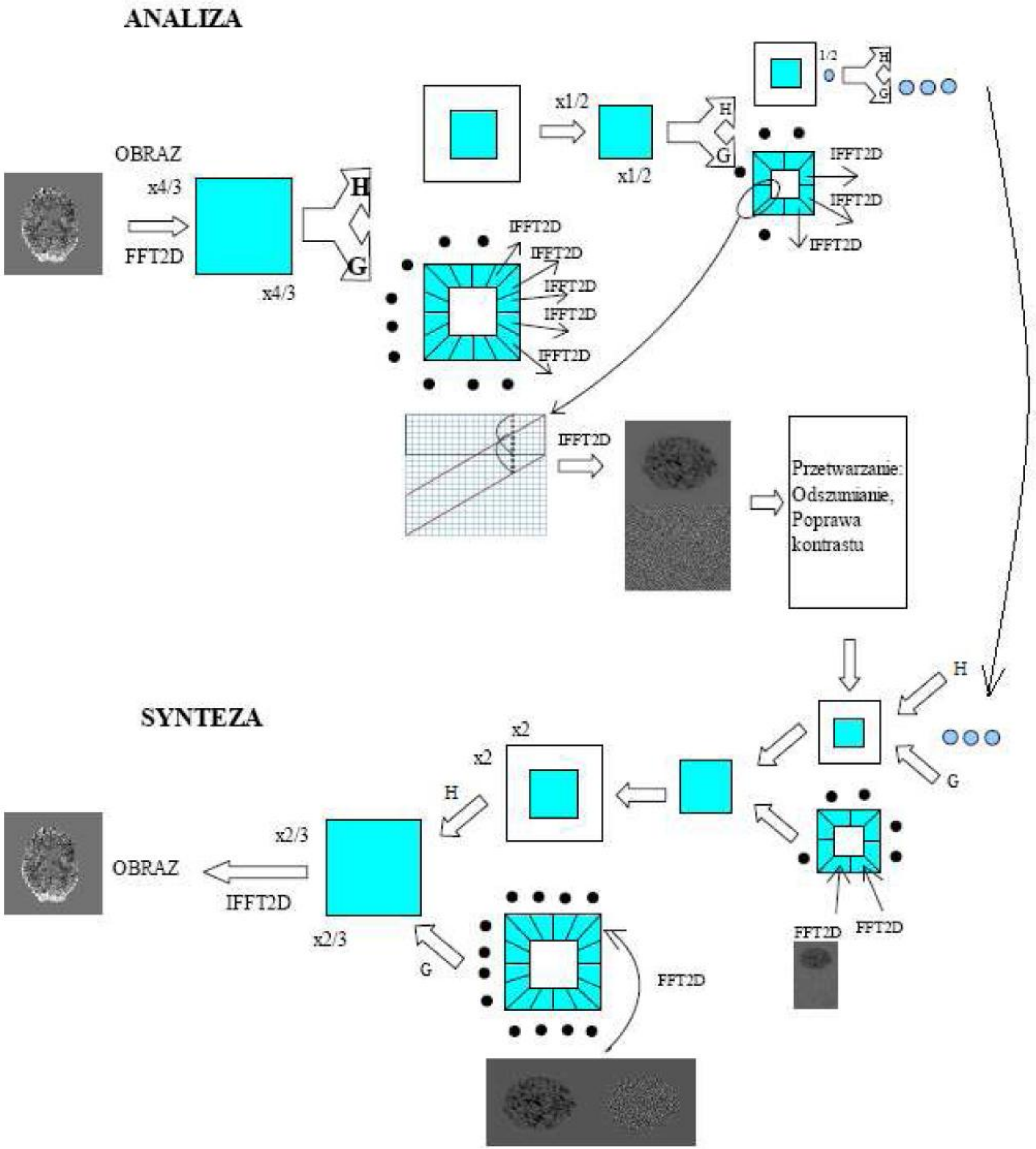
Curvelety



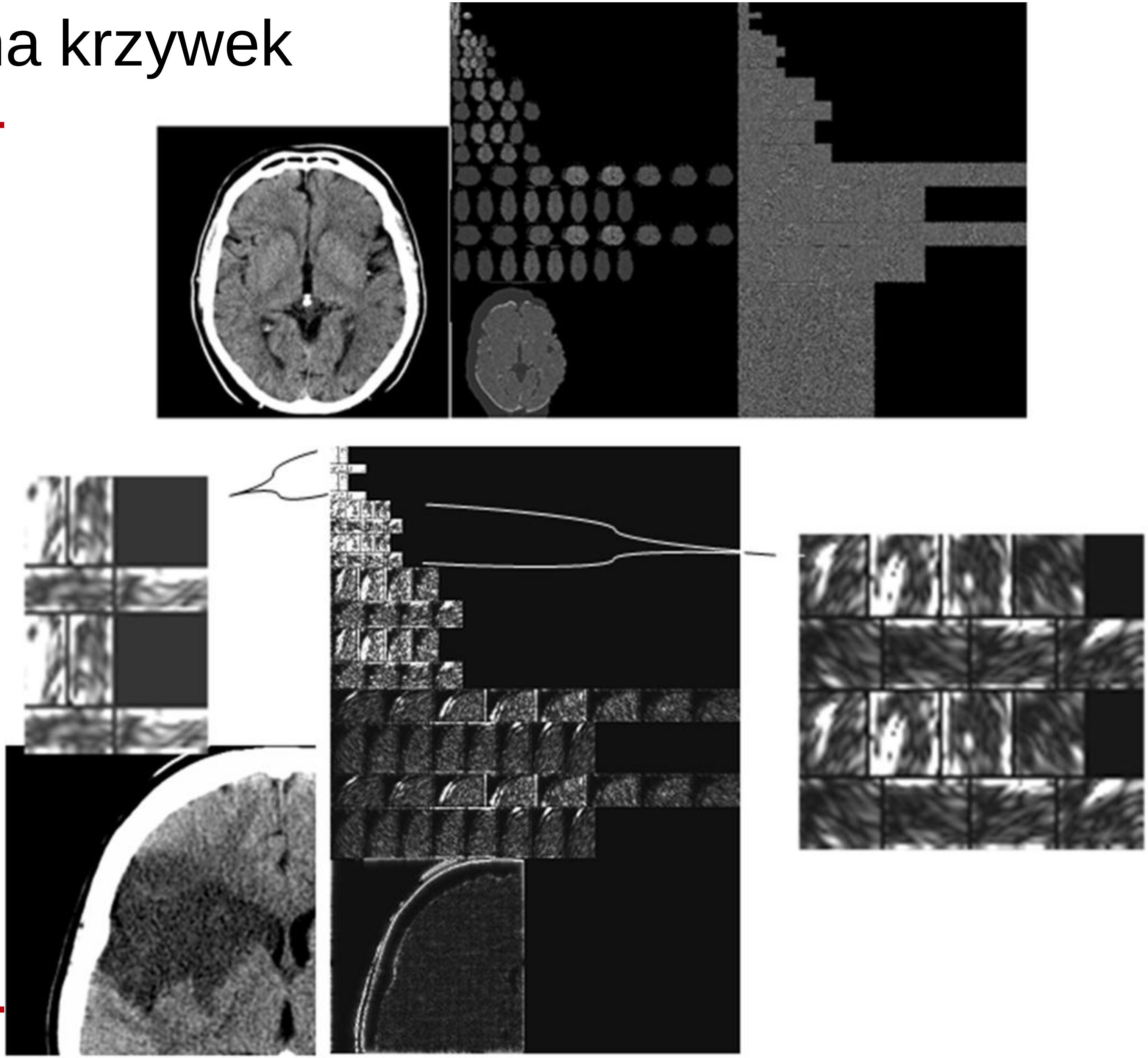

OBRAZ
FFT2D
DZIEDZINA TRANSFORMATY FOURIERA
FFT1D^{-1}
WT1D
ORIENTACJA
DZIEDZINA TRANSFORMATY RADONA
DZIEDZINA TRANSFORMATY RIDGELETOWEJ
CZĘSTOTLIWOŚĆ

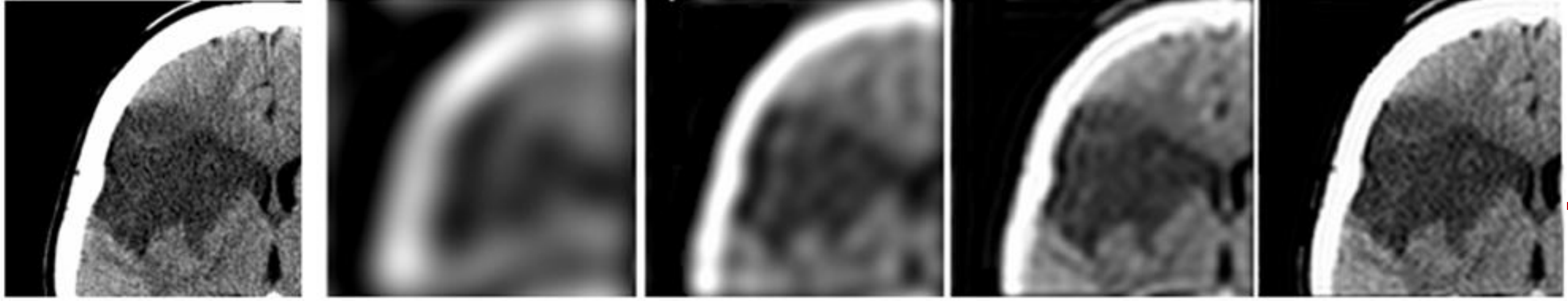

OBRAZ
DEKOMPOZYCJA WIELOROZDZIELCZA
TRANSFORMACJA RIDGELET
(DLA KAŻDEGO BLOKU)
SKALA
PODZIAŁ PODPASM WYSOKOCZĘSTOTLIWOŚCIOWYCH

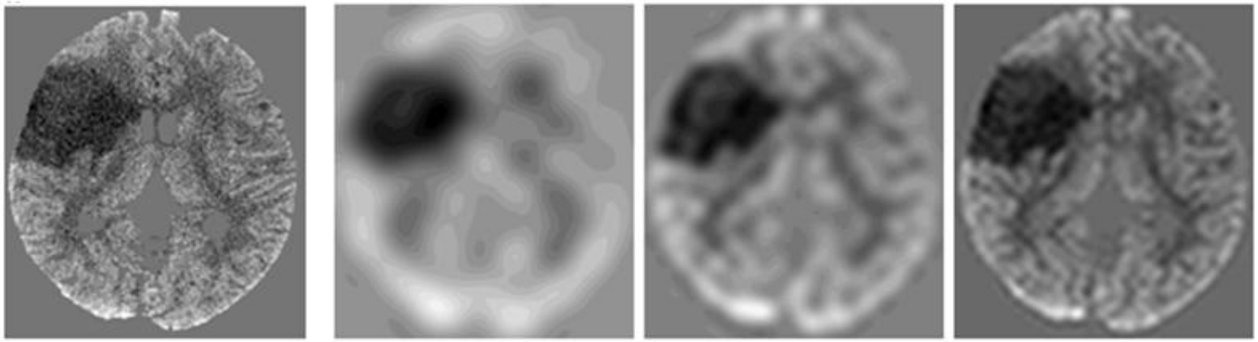
Curvelety II

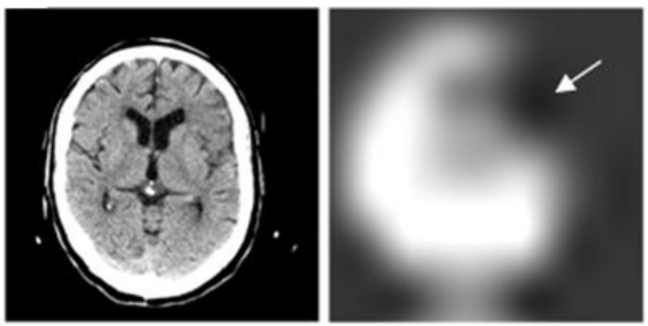


Dziedzina krzywek

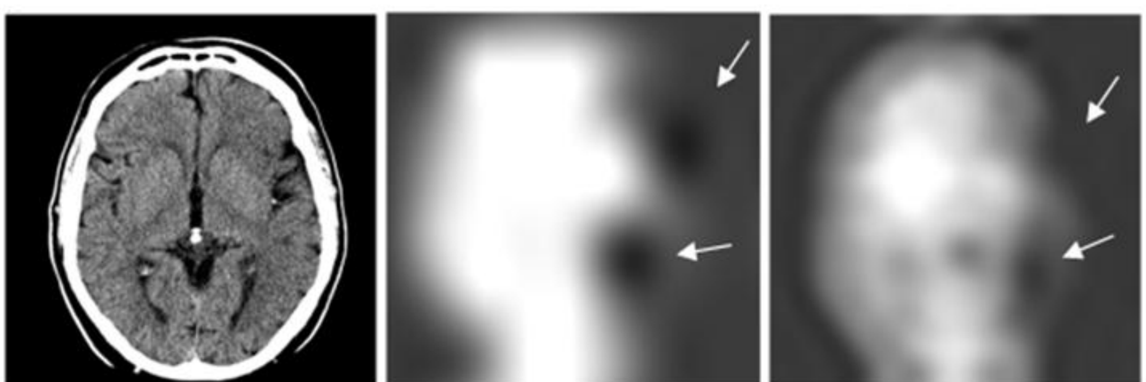




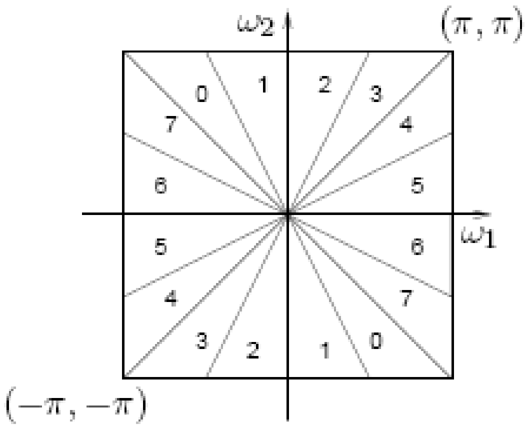


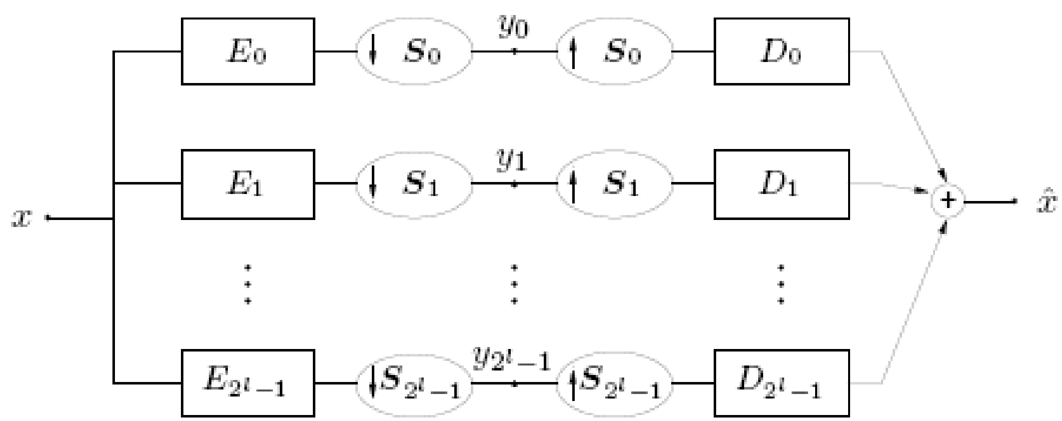


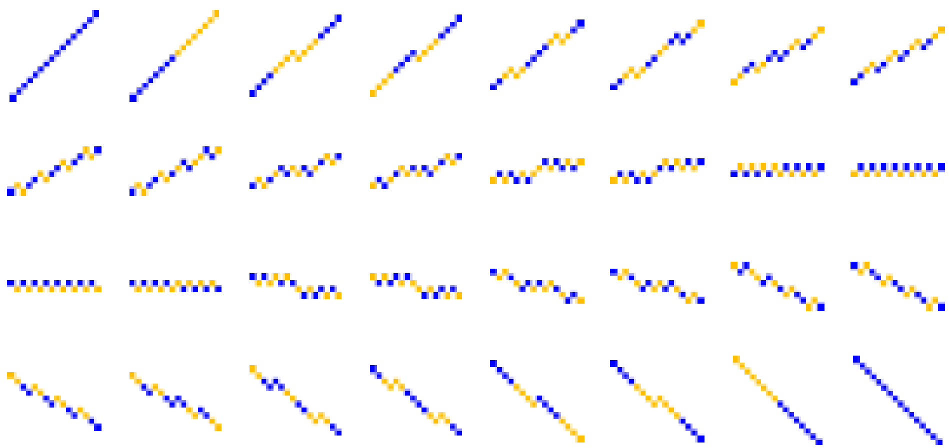
Obrazki krzywkowe



Countourlets: filtry kierunkowe

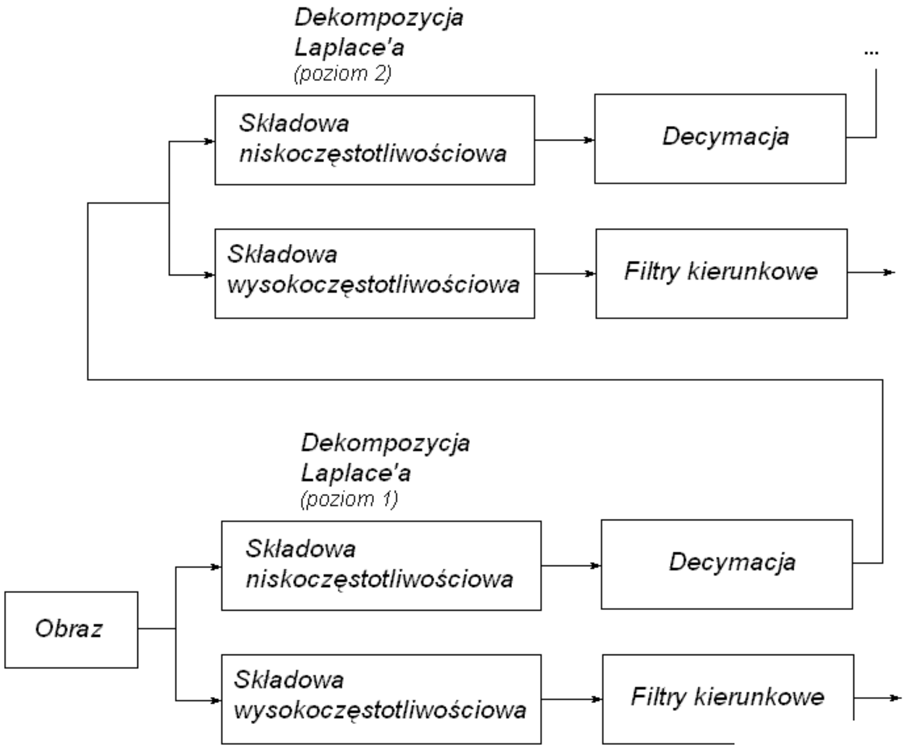


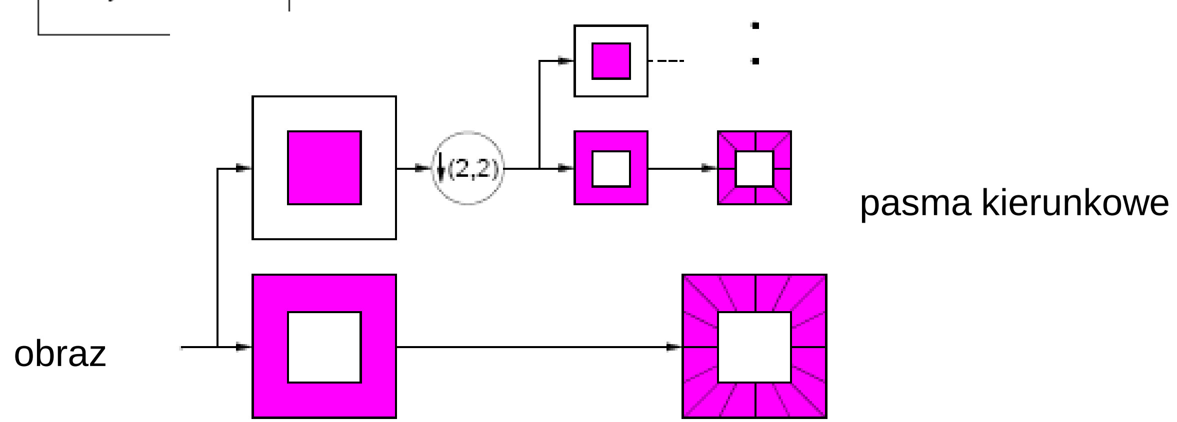




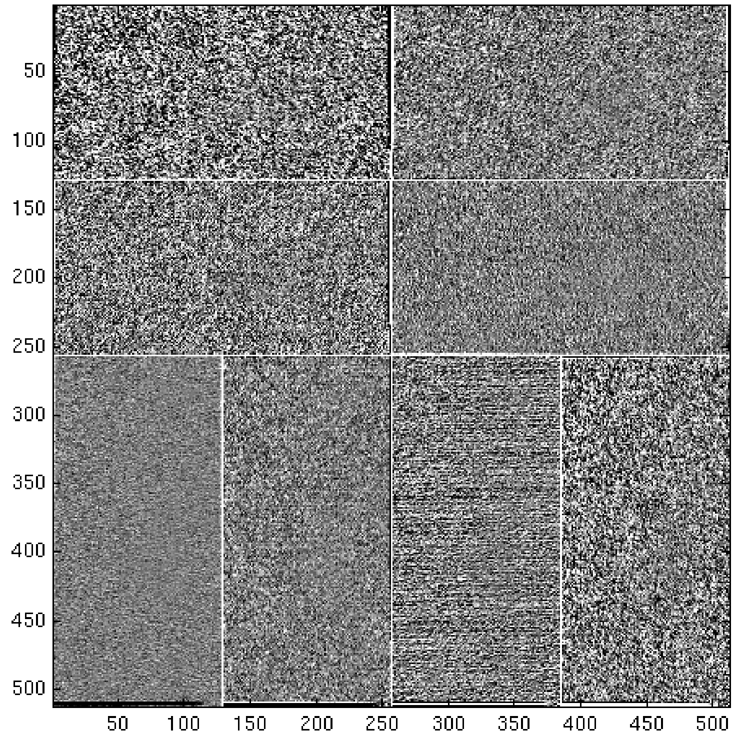
kierunkowe filtry Haara (niebieski to 1, żółty to -1)

Contourlets: dekompozycja



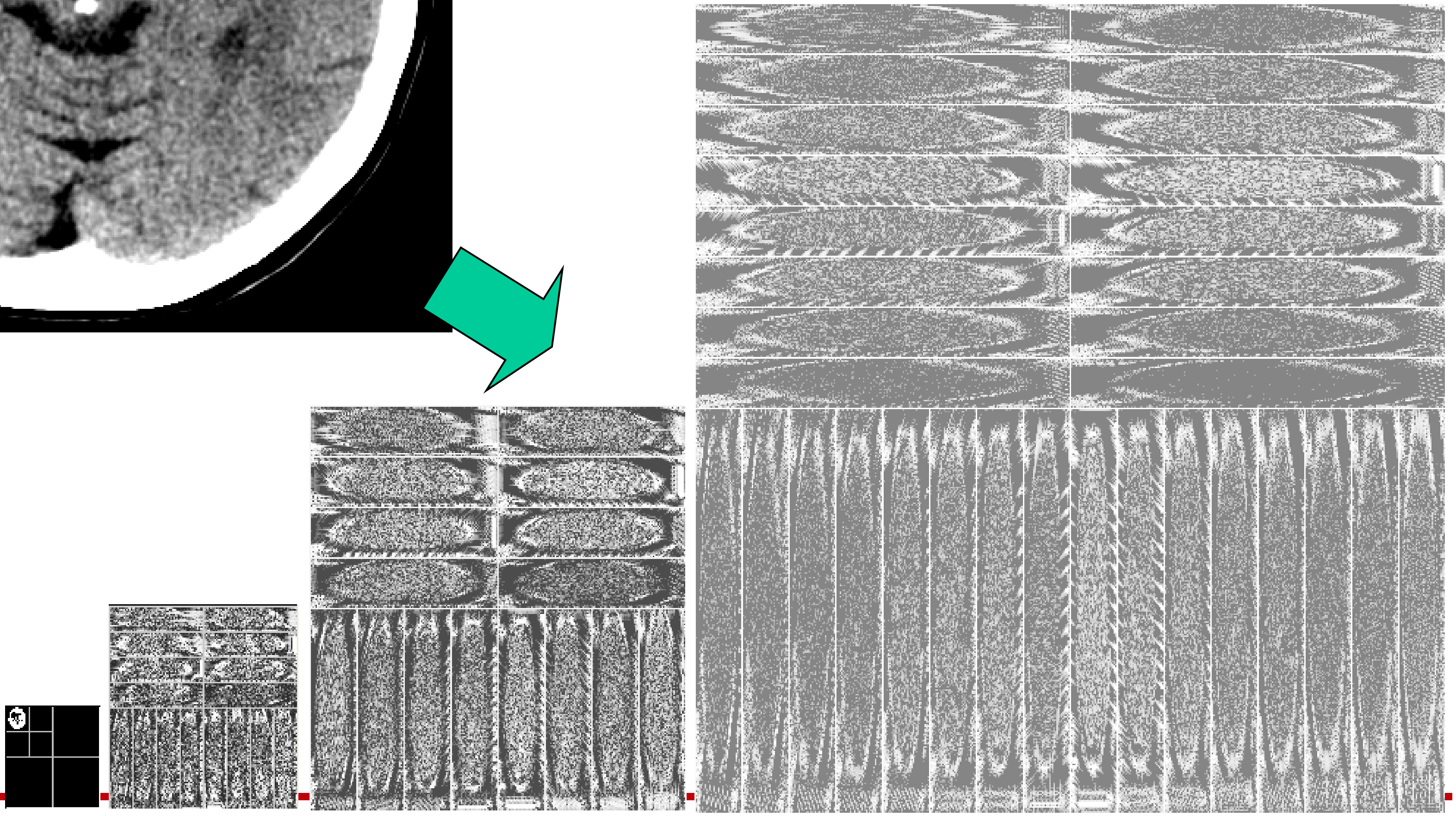


Contourlets: rozkłady współczynników

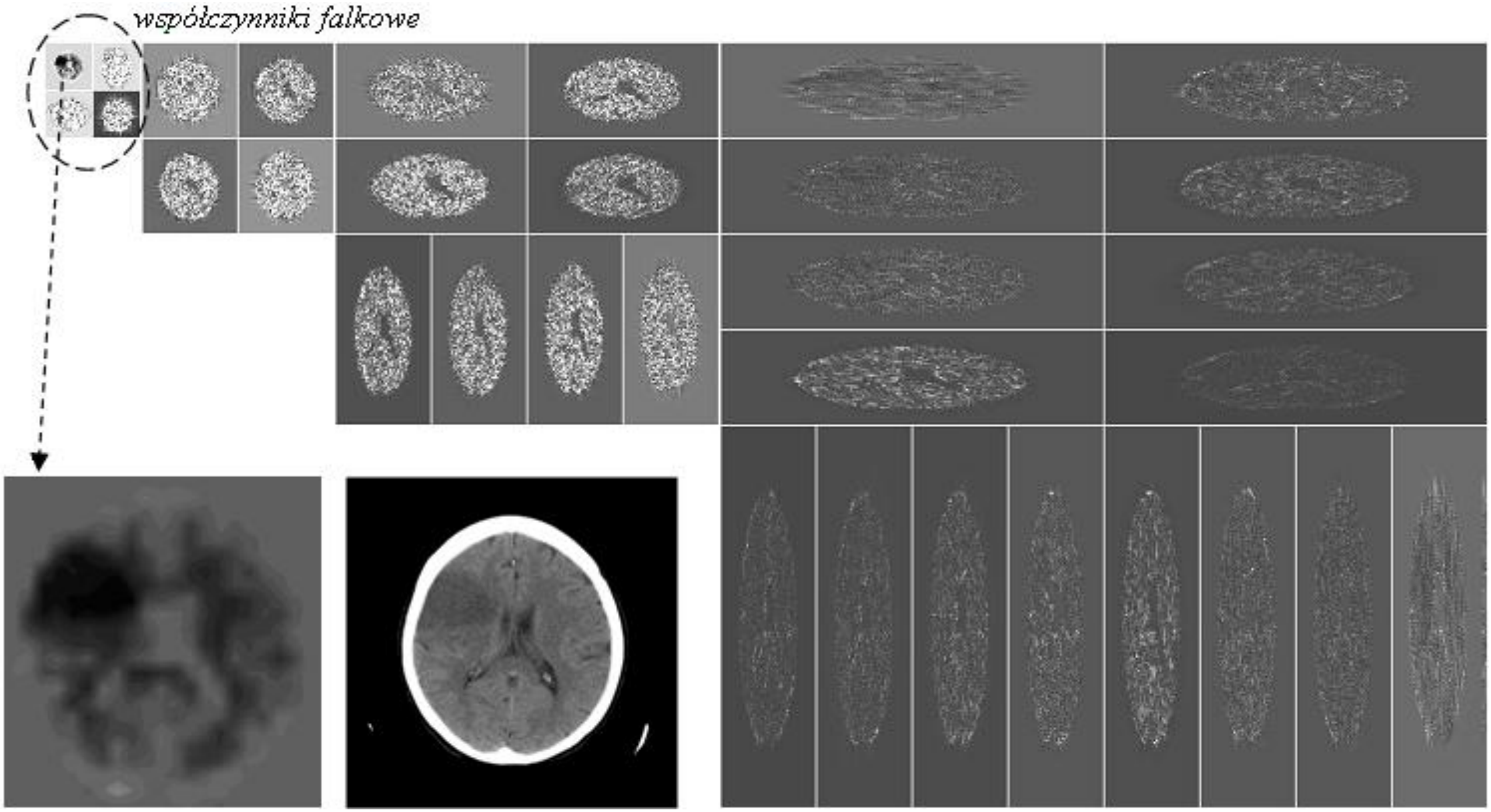


3 poziom banku 8 filtrów kierunkowych

Contourlets: dekompozycja obrazu



Obraz w dziedzinie konturków



Aproksymacje

13,6% współczynników

falkowa wedgeletowa curveletowa DFT